モンテカルロ積分とイベント生成（演習）

平成21年9月3日

KEK
川端　節彌

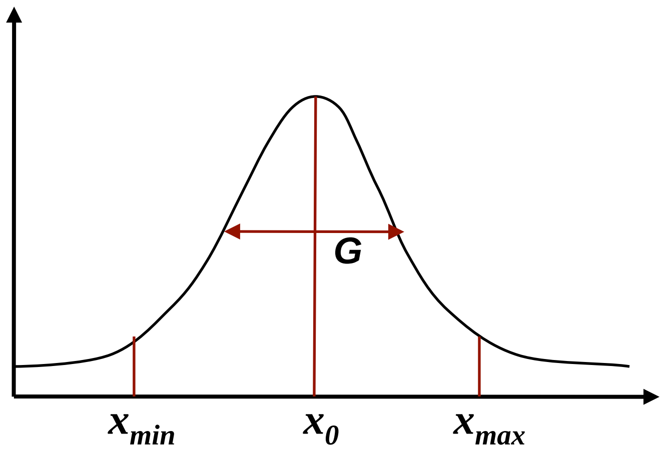
1. 直接法による乱数生成

- **Breit-Wigner公式**

$$f(x) = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(x-x_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

ただし、

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-x_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} = \frac{2}{\Gamma}\tan^{-1}\left\{\frac{2}{\Gamma}(x-x_0)\right\}$$



ピークが x_0で、x_{min} から x_{max} まで $f(x)$ の分布をする乱数を生成する 関数サブプログラムを作成する。

Function BRWIG(r, x0, xmin, xmax, dxdr)

Return value : ピークが x_0で、x_{min} から x_{max} まで分布する乱数

dxdr : ヤコビヤン dx/dr

Input r : uniform random number r

x0 : ピーク位置 x_0

xmin : 分布の下限 x_{min}

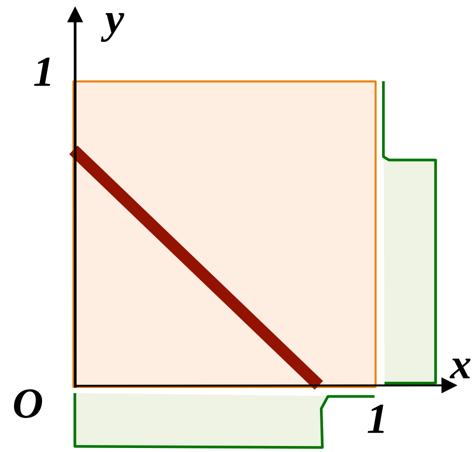
xmax : 分布の上限 x_{max}

2. BASESの練習 (1)

次の積分をBASESで実行する

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x+y-a)^2+\epsilon^2}$$

ただし、$a = 0.8$ とし、$e = 10^{-1}$, 10^{-3} の場合を計算する。



Integration results of BASES

e	Expected	Estimate(error)	CPU time
10^{-1}	22.0287	22.0265(0.0196)	0.58
10^{-2}	248.1501	248.6445(0.5460)	19.16
10^{-3}	2,510.0960	2,508.27 (11.12)	117.48
10^{-4}	25,129.5631	24,617.0 (182.1)	585.24
10^{-5}	251,324.2342	239,900.9 (4,542.0)	1169.83

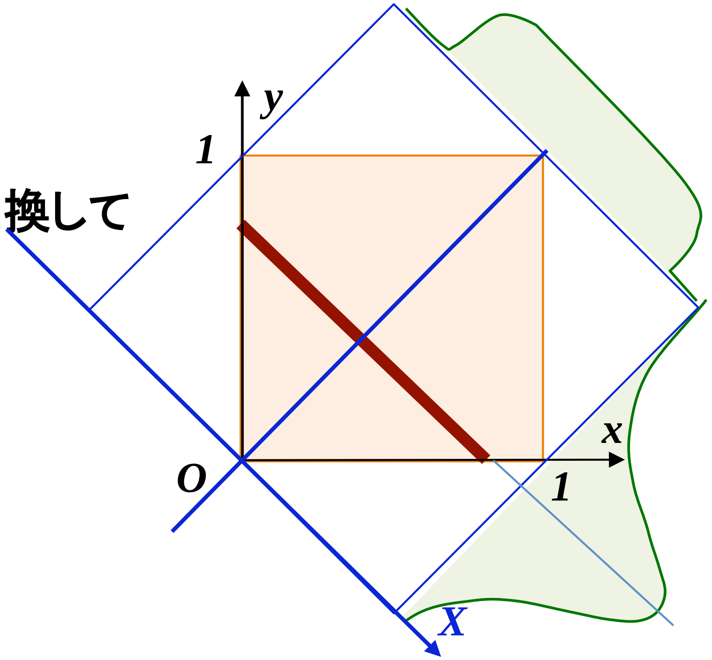
3. BASESの練習 (2)

前ページの積分を

積分変数を *x, y* から 図のような変数 *X, Y* に変数変換して

実行する。

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x+y-a)^2+\epsilon^2}$$
$$= \int_{-1}^1 dX \int_0^2 dY \frac{0.5}{(Y-a)^2+\epsilon^2}$$



ただし、積分範囲が

$0 \le x \le 1$　　　$0 \le y \le 1$

となるようにカットを入れる。同じく、e = 10^{-1}, 10^{-3} の場合を計算する。

e	Expected	Estimate(error)	CPU time
10^{-1}	22.0287	22.0270(0.0215)	1.70
10^{-2}	248.1501	248.042(0.1232)	9.47
10^{-3}	2,510.0960	2,511.476 (1.237)	12.30
10^{-4}	25,129.5631	25,128.54 (12.15)	17.26
10^{-5}	251,324.2342	251,475.9 (124.5)	92.10

4. マッピングの適用 (1)

次の積分をBASESで実行する

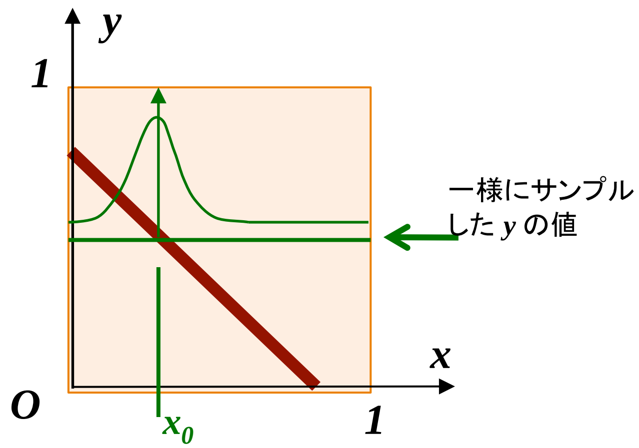
$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x+y-a)^2+\epsilon^2}$$

ただし、$a = 0.8$ とし、$e = 10^{-1}$, 10^{-3} の場合を計算する。
今回は、関数サブプログラムBreiWigを使って、
以下のように計算する。

(1) 一様乱数によって変数 y の値を決める。

(2) 関数のピークは、$x = a - y$ にある。

- この値をBreit-Wignerのピーク位置 x_0 にする。
- Breiti-Wignerの幅 は $G = 2 \times e$ の程度にする。
- $x_{min} = 0.0$, $x_{max} = 1.0$ でよい。



e	Expected	Estimate(error)	CPU time
10^{-1}	22.0287	22.0265(0.0196)	0.58
10^{-2}	248.1501	248.6445(0.5460)	19.16
10^{-3}	2,510.0960	2,508.27 (11.12)	117.48
10^{-4}	25,129.5631	24,617.0 (182.1)	585.24
10^{-5}	251,324.2342	239,900.9 (4,542.0)	1169.83

参考

■ 関数サブプログラム BRWIGで計算すること

Input 一様乱数 :z 、 ピークの位置 :x_0、積分の上下限: x_{max}、x_{min} 、 Output 乱数: x と dx/dz

Breit-Wigner : $f(x) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(x-x_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$　　不定積分: $F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left\{\frac{2}{\Gamma}(x-x_0)\right\}$

一様乱数 $\zeta = \frac{F(x) - F_{min}}{F_{max} - F_{min}}$ 但し $F_{max} = F(x_{max})$, $F_{min} = F(x_{min})$　　$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{\frac{dF(x)}{dx}}{F_{max} - F_{min}} = \frac{f(x)}{F_{max} - F_{min}} \equiv p(x)$

x について解くと $x = x_0 + \frac{\Gamma}{2}\tan\pi\{\zeta(F_{max} - F_{min}) + F_{min}\}$　　$\frac{dx}{d\zeta} = \frac{F_{max} - F_{min}}{f(x)} = \frac{1}{p(x)}$

■ 求める積分

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x+y-a)^2 + \varepsilon^2} = \int_0^1 \frac{1}{p(x)} p(x)dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x+y-a)^2 + \varepsilon^2}$$

$$= \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1}{p(x)} dP \int_0^1 dy \frac{1}{(x+y-a)^2 + \varepsilon^2}$$

$x_0 = a - y$ 但し y: 一様乱数

dP : x_0 にピークをもつ $p(x)$ で分布する乱数

$$= \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{d\varsigma} dP \int_0^1 dy \frac{1}{(x+y-a)^2 + \varepsilon^2}$$

```
Y   = X(2)
X0  =  A - Y
X   = BRWIG( X(1), X0, 0, 1, DXDZ)
FX  = X + Y – A
FX  = FX*FX + EPS2
FX  = DXDZ/FX
```