

ファインマン振幅の自動計算

加藤 潔

〈工学院大学工学部 160 東京都新宿区西新宿 1-24 e-mail: kato@sin.cc.kogakuin.ac.jp〉

金子敏明

〈明治学院大学一般教育部 244 横浜市戸塚区上倉田町 1518 e-mail: kaneko@gen.meijigakuin.ac.jp〉

素粒子の反応確率を手で計算することが、より高いエネルギーでの実験に対しては困難になりつつある。このため高エネルギー物理学のエキスパートシステムとして、ダイアグラム生成、散乱振幅の自動生成、積分とイベントジェネレーション等を統合したシステムが開発されている。このような、摂動計算を自動的に行うシステムの現状や構成要素について、GRACE システムを具体例として解説する。

1. はじめに

現在の素粒子物理学の標準模型と呼ばれるものは量子色力学 (QCD: Quantum Chromodynamics) と電弱理論 (EWT: Electroweak Theory) であり、これらは相対論的量子場理論 (QFT: Quantum Field Theory) として定式化されている。¹⁾ この模型での素粒子であるクォークやレプトンの反応からその内部量子数が実験的に決まり、そしてこれらが表現として属する対称群が決まる。QFT を枠組みとし、この対称性に関する局所ゲージ不変性と繰り込み可能性を理論の条件として課すと、相互作用の形はほとんど一意的に決まってしまう。クォークの持つ「色の電荷」の自由度から QCD の対称群として $SU(3)$ が、クォークやレプトンの電荷や弱い相互作用における振舞から EWT の対称群として $SU(2)_L \times U(1)$ が採られる。これらをまとめた、 $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)$ 群に関する QFT が標準模型であって、既知の粒子はすべてこの中に居場所を持つ。^{*} 今までの高エネルギー物理学実験の結果は加速器実験も非加速器実験もほとんどこの模型の帰結と整合性のある結果を与える。そして、標準模型のメンバーで未発見のヒッグス粒子の探求、トップクォークに関する精度の高い研究、あるいは CP 非保存の因を探るためのクォーク質量行列要素の測定等が、当面の重要な実験課題となっている。

この標準模型は、しかし、まだ究極の理論 (TOE: Theory of Everything) ではないことが、さまざまな理由から主張されている。この世界の基本的な構成要素とそこで働く力の理解は、高エネルギー実験や観測により発見された事実を理論的予測と比較することにより明らかになるはずである。実験により新たなデータを得ることは、もとより難しい仕事であるが、理論的予測を正確に計算することもまた容易ではない。標準模型に限っても QFT を厳密に解くことは極めて難しい。

幸いなことに、多くの場合において標準模型は摂動計算が有効である。EWT は結合定数が小さいので摂動論が有効であり、また QCD も色の電荷の「反誘電性」により運

動量移行の大きい領域での漸近的自由という性質から摂動論が適用できる。先に標準模型が実験と合っていると述べたことのほとんどは標準模型の摂動論による予言と実験が一致していることを指しているのである。QFT 摂動論の手法は確立しており、なすべきことは摂動級数の項に対応するファインマン図形を描き、それから振幅を計算すればよいのである。³⁾

しかしながら、未知の領域を目指そうとすれば、よりエネルギーの高い領域で実験することになり、その結果多粒子生成チャンネルを計算する必要性が生じる。例えば $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ を例にとると、それは 3 個のファインマン図形で表されるが、 $e^+e^- \rightarrow W^+W^-\gamma$ は 18 個、 $e^+e^- \rightarrow W^+W^-\gamma\gamma$ は 138 個となる。^{*} W の崩壊を考えれば、例えば、 $e^+e^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e u \bar{d}$ が 24 個、 $e^+e^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e u \bar{d} \gamma$ が 202 個であり、しかもこれらは崩壊の一例に過ぎない。以上の数字は、終状態に対して摂動級数の最低次の項（ツリー振幅）である。実験家の努力により高精度のデータが得られた場合は、高次の項（ループ振幅）を計算する必要がある。例えば上述の $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ の 1 ループ振幅は 129 個、 $e^+e^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e u \bar{d}$ のそれは 1,294 個となる。

このような例から分かるように、従来の理論家の手計算を主とした方法だけでは、今後の高エネルギー物理学実験について、正確に計算することはおろか、図形を過不足なく描くことすらほとんど不可能になってしまう。摂動計算のアルゴリズムは確立しているのであるから、今後の実験の発展を考えると、コンピューター上の自動計算システムを考えることが重要となる。このような、いわば高エネルギー物理学のためのエキスパートシステムの開発は世界的にいくつかのグループでなされている。⁴⁾ モスクワ大学のグループは CompHEP システムを開発している。⁵⁾ このシステムでは、自由にプロセスを選びグラフを生成し、FORTRAN コードを出力して微分断面積を画面に出力す

^{*} 図形の個数はゲージによる。これらの数字はファインマンゲージの場合であって、ユニタリゲージの場合は数割減る。また、ここではヒッグス粒子と軽いフェルミ粒子の結合を無視している。さらに、ループを含む場合は、繰り込み処理のシステムに個数は依存するので、ここの数字は正確には GRACE が生成する個数である。

^{*} 最近、その確度の高い存在の徴候が示されたトップクォークにより、フェルミ粒子の座席が 3 世代分きちんとうまった。²⁾

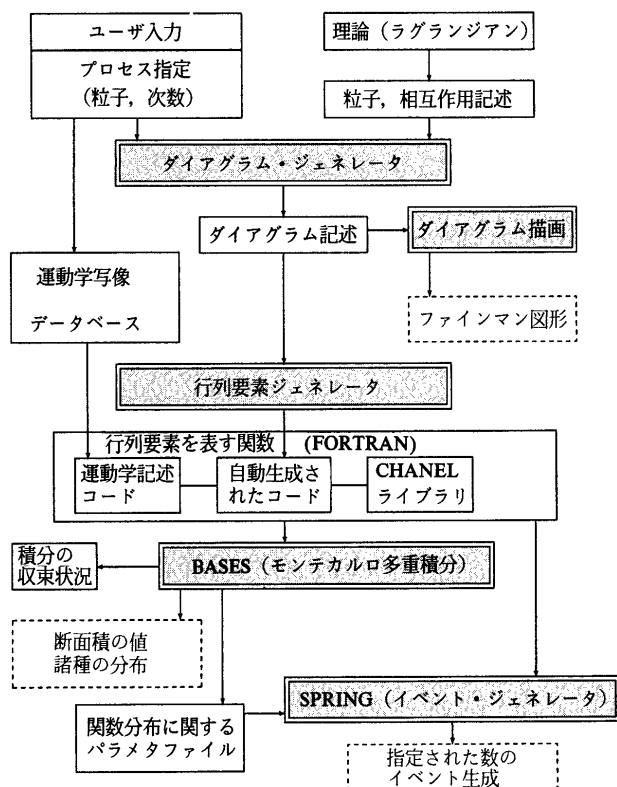


図1 GRACE システムの概要.

```
* 5120 E +E- => W+ W- A    TREE
WORDER    3
INITIAL   EL    1
INITIAL   ELB   1
FINAL    AB    1
FINAL    WB    1
FINAL    WBB   1
KINEM     3002
END
```

図2 GRACE の入力データ.

るところまでを、インタラクティブな一貫した処理により行える。ドイツのビュルツブルグ大学を中心としたグループでは Feynart/Feycalc システムを開発している。⁶⁾ これはループ計算を行うためのパッケージを持っているのが特徴である。他に、アメリカのウイスコンシン大学のグループの MADGRAPH システムなどがある。⁷⁾

本稿では、KEK を中心としたグループにより開発されている GRACE システムを具体的な例として、このような自動計算システムの内容と課題について解説する。⁸⁾ まず自動計算システムがどんなものかを理解してもらうために、次の節でその動作を具体的に示し、更に今まで得られた物理的成果について要約する。次に自動計算システムの構造について述べる。ツリー振幅に対する GRACE システムの概要を示した図1からわかるように、システムの主要な構成要素は以下の通りである。

- ・ファインマン図形の生成、
- ・振幅数値計算のためのソース生成（および振幅の数値計算ライブラリ関数）、

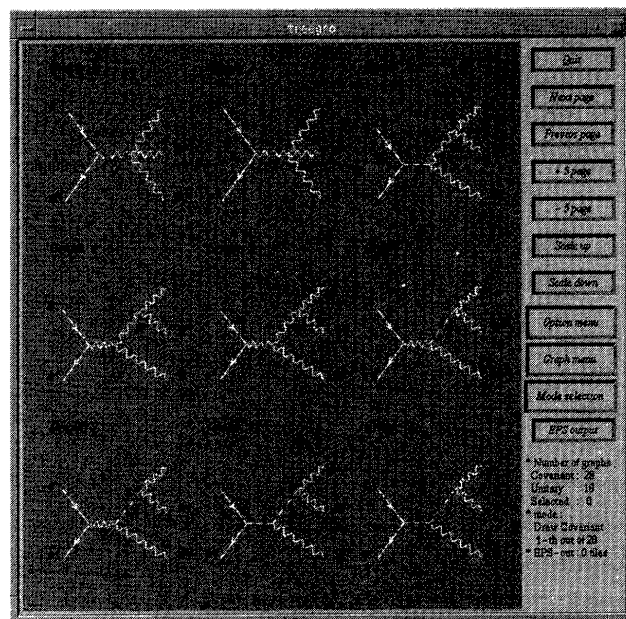


図3 treegrf コマンドによるファインマン図形の表示.

・位相空間での積分とイベント・ジェネレーション。
ひきつづく三つの節で、上に示した各要素について議論する。ループを含む振幅への拡張を6節で考える。最後に今後の見通しについて述べる。

2. GRACE システムの動作

図1に示された GRACE システムを利用して断面積を計算するには、まず、その過程を記述する入力ファイルを作成する。^{*} 具体例として、過程 $e^+e^- \rightarrow W^+W^-\gamma$ を考えると、その入力制御データは図2のようになる。

この入力データで1行目はコメントであり、2行目は電弱理論の3次の過程であることを宣言している。3行から7行までは過程の粒子名と個数を示している。8行目の KINEM 行は5節で詳しく説明する「運動学写像」を指定するオプションである。

さて入力ファイルが作成されたら**

% gengraph 入力ファイル名

とすることによりダイアグラムが生成される。その後で

% treegrf

とすると、画面上で生成されたダイアグラムを見ることができる。例として過程 $e^+e^- \rightarrow W^+W^-\gamma$ 過程の最初の9個のグラフを表示した状況を図3に示す。この作図システム

^{*} ここでは UNIX システムでの利用を念頭に置いて記述する。本節はツリー振幅のみを計算する GRACE v.1.1 に関する記述であって、これは公開されている。システムを入手するには、ftp.kek.jp に anonymous ftp で接続し、kek/minami/grace ディレクトリにあるファイルをコピーしてもらいたい。構成やインストールに関しては、まず、そのディレクトリにある README ファイルを参照されたい。粒子名規約や運動学写像等に関する詳しいドキュメントもこのパッケージ内に含まれている。

^{**} % は UNIX のプロンプトを表す。

Date: 94/ 1/ 9 14:02

Convergency Behavior for the Integration Step

<- Result of each iteration ->				<- Cumulative Result ->		<- CPU time ->	
IT	Eff	R_Neg	Estimate	Acc %	Estimate(+ Error) order	Acc % (H: M: Sec)	
1	97	.00	3.449E+00	.987	3.449476(+-.034036)E 00	.987	0: 7: 9.38
2	97	.00	3.370E+00	.944	3.407093(+-.023241)E 00	.682	0: 8:22.18
3	97	.00	3.391E+00	.956	3.401467(+-.018889)E 00	.555	0: 9:33.93
4	97	.00	3.378E+00	.966	3.395686(+-.016350)E 00	.481	0:10:45.54
5	97	.00	3.383E+00	.932	3.392969(+-.014514)E 00	.428	0:11:58.49

図4 BASESが出力する積分の収束状況と結果の値。

Histogram (ID = 3) for X(3) SPECTRUM

x		d(Sigma)/dx		Linear Scale indicated by "*"			
				0.0E+00	8.3E+00	1.7E+01	2.5E+01
I	E	O	I	.000	E	O	I
I	.000	I	2.595+-	.051	E	11*****	0000000000
I	.020	I	8.402+-	.279	E	01*****	0000000000
I	.040	I	5.954+-	.265	E	01*****	0000000000
I	.060	I	4.817+-	.229	E	01*****	0000000000
I	.080	I	3.415+-	.171	E	01*****	0000000000
I	.100	I	3.698+-	.167	E	01*****	0000000000
I	.120	I	3.053+-	.148	E	01*****	0000000000
I	.140	I	2.898+-	.154	E	01*****	0000000000
I	.160	I	2.443+-	.160	E	01*****	0000000000
I	.180	I	2.917+-	.155	E	01*****	0000000000
I	.200	I	2.183+-	.134	E	01*****	0000000000
I	.220	I	1.874+-	.127	E	01*****	0000000000
I	.240	I	2.161+-	.129	E	01*****	0000000000
I	.260	I	1.924+-	.123	E	01*****	0000000000
I	.280	I	1.589+-	.110	E	01*****	0000000000
I	.300	I	1.543+-	.100	E	01*****	0000000000
I	.320	I	1.387+-	.107	E	01*****	0000000000
I	.340	I	1.316+-	.086	E	01*****	0000000000
I	.360	I	1.239+-	.091	E	01*****	0000000000
I	.380	I	1.282+-	.091	E	01*****	0000000000
I	.400	I	1.021+-	.069	E	01*****	0000000000
I	.420	I	9.757+-	.814	E	-11*****	0000000000
I	.440	I	9.046+-	.458	E	-11*****	0000000000
I	.460	I	8.947+-	.466	E	-11*****	0000000000
I	.480	I	9.287+-	.679	E	-11*****	0000000000
I	.500	I	8.258+-	.790	E	-11*****	0000000000
I	.520	I	9.083+-	.589	E	-11*****	0000000000
I	.540	I	9.549+-	.668	E	-11*****	0000000000
I	.560	I	9.718+-	.739	E	-11*****	0000000000
I	.580	I	9.076+-	.840	E	-11*****	0000000000
I	.600	I	1.193+-	.088	E	01*****	0000000000
I	.620	I	1.401+-	.093	E	01*****	0000000000
I	.640	I	1.428+-	.119	E	01*****	0000000000
I	.660	I	1.097+-	.101	E	01*****	0000000000
I	.680	I	1.947+-	.123	E	01*****	0000000000
I	.700	I	1.979+-	.126	E	01*****	0000000000
I	.720	I	2.099+-	.122	E	01*****	0000000000
I	.740	I	2.214+-	.138	E	01*****	0000000000
I	.760	I	1.784+-	.125	E	01*****	0000000000
I	.780	I	2.376+-	.141	E	01*****	0000000000
I	.800	I	2.483+-	.144	E	01*****	0000000000
I	.820	I	2.566+-	.149	E	01*****	0000000000
I	.840	I	2.883+-	.152	E	01*****	0000000000
I	.860	I	2.803+-	.150	E	01*****	0000000000
I	.880	I	3.448+-	.175	E	01*****	0000000000
I	.900	I	3.906+-	.176	E	01*****	0000000000
I	.920	I	4.146+-	.196	E	01*****	0000000000
I	.940	I	5.760+-	.247	E	01*****	0000000000
I	.960	I	8.741+-	.291	E	01*****	0000000000
I	.980	I	2.612+-	.052	E	11*****	0000000000
I	E	O	I	.000	E	O	I
x		d(Sigma)/dx		Logarithmic Scale indicated by "0"			
				1.0E-01	1.0E+00	1.0E+01	

図5 BASESが出力するヒストグラムの例。これはX(3)の積分変数に関する分布。

はOSF/Motifによるインターフェースをもち、図3の右側に表示されているボタンを操作して、グラフの拡大・縮小、ゲージの変更やグラフ群の選択、図形を表す post-script 形式のファイルの作成・出力などの機能をインタラクティブに利用することができる。更に、

% genfort

とすると、断面積を計算する FORTRAN プログラムや Makefile が自動的に生成される。ビームのエネルギーや、運動量、角度等のカットオフについては、必要に応じ生成されたプログラムを編集して変更する。次に、ユーザは

% make

とすると、テストプログラム gauge、積分とイベント生成を行う実行ファイル integ、spring を得る。

% integ

とすることにより、モンテカルロ積分プログラム BASES を使って断面積が図4のように計算される。正しい値が得られたかどうかは、図4に示される収束状況から判断する。

BASES から簡単な診断メッセージが出るが、それは万能ではない。収束がうまくいっていない場合は、粒子の順序を入れ換える、別の運動学写像を指定する、あるいは、その過程に適合した写像をユーザが作成する、といった対策をとらなくてはならない。BASES は図5に示すようなヒストグラムも出力する。なお、BASES は被積分関数と積分領域の分割に関する情報をパラメタファイルとして出力し、それが次の段階で使われる。

さらにイベント生成を行いたい場合は

% spring

とすることによりイベント生成を制御するプログラム SPRING が起動され、BASES が作成したパラメタファイルを利用して、指定した数だけのイベント（粒子の4ベクトルの組）を効率的に生成する。*

表1(a)-(c)に、本稿執筆時点までに GRACE を利用して計算された過程の断面積のリストを示す。*ただし、2体→2体反応や崩壊反応は省略した。なおグラフ数はファインマンゲージによるものであり、また軽いフェルミ粒子とヒッグス粒子の結合は無視している。

これらの計算で得られた物理の詳細な内容は各原論文に譲るが、 W^+W^- 生成を念頭においた4体フェルミ粒子生成^{13g)}さらにその輻射補正、^{13h)} L3異常現象に対する $e^+e^- \rightarrow l\bar{l}\gamma\gamma$ 過程、^{13d)} LEP IIでの単独トップクォーク生成、^{13f)} TeV領域におけるヒッグス粒子生成^{13e)}などについて、近似なしの計算が行われ、その結果従来の近似的計算法の有効性と限界が GRACE システムにより明らかになったことを述べておきたい。

計算時間であるが、FORTRAN コードの生成まではシ

* BASES, SPRING 共に、デフォルトで積分変数に関するヒストグラムを生成するが、ユーザが調べたい分布に関しては、ドキュメントに従い準備とヒストグラムにデータを詰める部分をプログラムに記述する。

** 一部はモスクワ大学と共同で計算を行った。

表 1

(a) 2 体→3 体反応.		
過 程	グラフ数	参考文献
$e^+e^- \rightarrow W^+W^- \gamma$	18	13a
$\rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e Z^0$	9	13b
$\rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e H$	2	13b
$\rightarrow e^+e^- H$	2	13b
$\rightarrow Z^0 Z^0 H$	4	13b
$\rightarrow W^+W^- H$	11	13b
$\rightarrow Z^0 Z^0 Z^0$	9	13b
$\rightarrow W^+W^- Z^0$	20	13b
$\rightarrow t\bar{t} Z^0$	9	13b
$\rightarrow t\bar{t} H$	6	13b
$\rightarrow HH Z^0$	6	13b
$\gamma\gamma \rightarrow e^+e^- Z^0$	6	—
$\gamma e \rightarrow e W^+W^-$	18	—
$gg \rightarrow q\bar{q}\gamma$	18	—

(b) 2 体→4 体反応.		
過 程	グラフ数	参考文献
$e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e W^+W^-$	60	13c
$\rightarrow \nu_{\mu(\tau)} \bar{\nu}_{\mu(\tau)} W^+W^-$	36	13c
$\rightarrow e^+e^- W^+W^-$	114	13c
$\rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e Z^0 Z^0$	57	13c
$\rightarrow e^+e^- W^- Z^0$	88	13c
$\rightarrow e^+e^- Z^0 Z^0$	86	13c
$\rightarrow e^+e^- \gamma\gamma$	80	13d
$\rightarrow \mu^+(\tau^+)\mu^-(\tau^-)\gamma\gamma$	40	13d
$\rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e b\bar{b}$	21	13e
$\rightarrow \nu_{\mu(\tau)} \bar{\nu}_{\mu(\tau)} b\bar{b}$	11	13e
$\rightarrow e^+e^- t\bar{t}$	21	13f
$\rightarrow W^+W^- \gamma\gamma$	138	—
$\rightarrow e^+e^- u\bar{d}$	24	13g
$\rightarrow u\bar{d}u\bar{d}$	69	13g
$\rightarrow q\bar{q}g\gamma$	21	—
$\rightarrow e^+e^- b\bar{b}$	50	—
$\gamma e \rightarrow \nu_e W^- HH$	40	—

(c) 2 体→5 体反応.		
過 程	グラフ数	参考文献
$e^+e^- \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \bar{t} b \gamma$	71	—
$\rightarrow e^- \bar{\nu}_e u \bar{d} \gamma$	202	13h

システムは「ただちに」結果を返すので、長い計算時間を必要とするのは数値積分のステップである。また、イベント生成は要求するイベント数に比例した時間が必要である。積分の計算時間は要求する精度などに依存するが、数十 Mips クラスのワークステーションで、表 1(a) あたりでは数分から数十分で答えがでてくる。表 1(b)-(c) のような過程では数十分は必要で、長いものでは数時間から 1 日くらいかかる場合もある。

3. ファインマン図形の生成

ユーザにより外線の粒子と摂動論の次数が指定されると、その過程を表すファインマン図形が生成される。図形の生

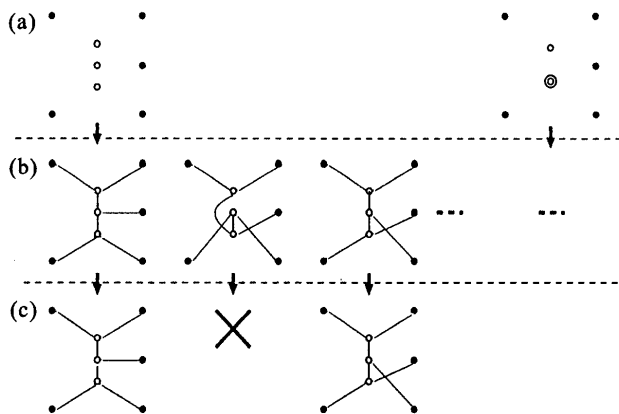


図 6 図形のトポロジカルな構造の形成. 外線 5, 次数 3 で, 黒丸は外線, 白丸と二重丸は 1 次と 2 次の頂点である.

成はグラフ理論で使われる手法を利用する.⁹⁾

最初にトポロジーの関係式を作っておく。標準模型に現れる頂点関数の次数 $O(v)$ は、頂点に集まる粒子数 $\text{deg}(v)$ と、 $O(v) = \text{deg}(v) - 2$ という関係にある。外線の数を E とし、図形全体のループの数を L および次数を $O = \sum O(v)$ とすると、 $L = (O - E + 2)/2$ が成立する。

いま興味があるのは反応過程なので、基本的な条件として、真空図形は考えないし、また外線はラベル (粒子名, 運動量) により相互に区別できるとする。このとき、次のような手順でダイアグラムが生成される.*

1. まず、全体の次数 O を頂点に分配する組合せをすべて考え、それぞれの場合について以下を行う (図 6(a)). この結果頂点の数 V が決まる。 $E + V$ 個のノード (頂点あるいは外線) の中の二つをつなぐものを辺と呼ぶ。
2. まだ粒子の種類は考えず、ノードをあらゆる可能なやりかたで結ぶ。これは、特定のノードから始めて、まだ $\text{deg}(v)$ だけの辺が接続していないノードを辺でつなぐことを反復する (図 6(b)).
3. 前項で生成されたグラフは重複を含む。頂点の置換で一致するグラフについては、代表一つを残す (図 6(c)).
4. 前段階までで、図形のトポロジカルな構造はすべて尽くされたので、粒子を辺に割り当てる。外線に接続した辺は入力で決まっている。標準模型に含まれる素な頂点は予めリスト構造をもつデータとして準備されているので、これを参照してあらゆる可能な組合せを作る。
5. 粒子の割当てにより生じる重複したグラフを取り除く。
6. 図形の因子を決める。統計重みは項 5 の操作で自己同型の置換の数から同時にわかる。また、フェルミオンループの (-1) 因子や、外線のフェルミオンの置換による相対符号も考慮する。

ステップ 3, 5 等で同型なグラフを判断している。一般

* この節では一般のループを含む場合を考える。

にグラフ同型の判断は、多項式計算時間では不可能である。つまり手順数がグラフのノード数 N 等に関して指数的に増加すると考えられるので、いかに効率的に比較を行うかが重要である。ここではグラフ理論における **orderly algorithm** を基礎として、更に効率よく行う方法が採用されている。⁹⁾

GRACE システムではこのようにして生成されたダイアグラムを記述するデータをファイルに出力し、次のステップの入力をするとともに、それを入力として図形出力プログラムを起動し、ファインマン図形を描いて見ることができる。

4. 振幅の計算

この節では、ループを含まない振幅の計算に限定して話を進める。ファインマン図形が生成されると、計算すべきものは微分断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Gamma} = \sum_{\text{spin}} |\sum_j T_j|^2 \rho = \sum_{\text{spin}} \sum_{j,k} T_j T_k^* \rho \quad (1)$$

である。ここで、 T_j は j 番目のファインマン図形が表す振幅、 Γ は位相空間での分布を表し、因子 ρ は位相空間に関する運動学的な量、入射粒子束、スピンや色の和・平均等を含むものである。

前節に示したように生成されたダイアグラムから振幅が生成される。単純な例として、 $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ 過程を考える。^{*} 図7のダイアグラムに対する振幅 T は

$$T = \bar{u}_e(p_2, s_2) e \gamma_\mu u_e(p_1, s_1) D_A^{\mu\nu}(q) \bar{u}_\mu(p_3, s_3) e \gamma_\nu u_\mu(p_4, s_4) \quad (2)$$

である。ここで、 u_e, u_μ は電子やミュー粒子の波動関数、 D_A は光子のプロパゲーター、 p_j, q は粒子の4元運動量、 s_j はフェルミ粒子のスピン変数、 $e\gamma$ は電磁相互作用を表す頂点関数である。^{**} このように、振幅はダイアグラムの各要素と一対一に対応する関数の積なのである。

通常教科書では(1)の右辺を扱う。しかし、式(1)の数値を求めることに目標を限定すれば、右辺の $T_j T_k^*$ を計算するよりも、中辺のように T_j を求め、それを数値的に加えて自乗をとれば計算量を減らすことができる。^{***}

振幅 T は式(2)に見るように複雑な関数であるが、外線の運動量やスピンを与えれば、個々の関数の数値が決まり、それらの積で値が得られる。フェルミ粒子に対しては4成分のスピンルや行列 (γ 行列) を扱う必要があるため、ヘリシティ状態に分解して2成分で計算すると計算量を大幅

^{*} この過程に対しては、QEDの摂動級数の最低次ではダイアグラムは一つである。EWTではZボソンを経由するダイアグラムなども必要になる。

^{**} この e が小さい量なので、いまの摂動論は、この e に関する級数展開となっている。

^{***} なお、色のある粒子が含まれる場合については、各振幅の数値を計算した後、色の自由度に関する群因子を各 $T_j T_k^*$ について求め、式(1)の右辺の形で合計する。

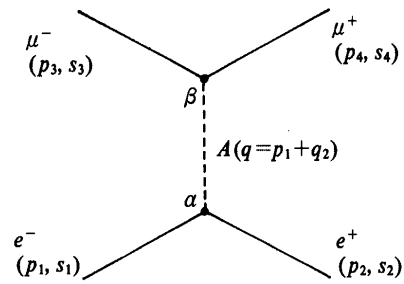


図7 ファインマンダイアグラムの例。

に減らすことができる。この手法にも **HELAS**¹²⁾ など、いくつかの流儀があるが、**GRACE** システムでは **CHANEL** ライブラリを使っている。¹⁰⁾

生成されたダイアグラム記述ファイルから、このような振幅の各成分を表す関数を呼び出し、積をとった上で、中間的に現れる各ヘリシティ状態について和をとることにより、振幅の数値が求められる。**GRACE** システムでは、そのような計算をする **FORTRAN** ソースコードが自動的に生成される。図1のように、振幅だけではなく、位相空間での積分のための、積分とイベント生成を司る **BASES/SPRING** とのインターフェースや、運動学的記述に関するソースコードも同時に生成される。

5. 積分とイベント生成

断面積や分布を得るためには、式(1)の微分断面積を位相空間 $d\Gamma$ で積分しなくてはならない。終状態が n 体のときは、 $3n-4$ 重の多重積分となる。このような場合に実用性のある多重数値積分はモンテカルロ法による数値積分しかない。^{*} 本稿で「運動学写像」と呼ぶものは、モンテカルロ積分の積分領域である、 $3n-4$ 次元の単位超立方体から、 n 粒子の運動量位相空間への写像

$$0 < X(I) < 1, (I=1, \dots, 3n-4) \Rightarrow p_j^I, (j=1, \dots, n) \quad (3)$$

である。

区間 $(0, 1)$ の1次元積分を考えると、単純なモンテカルロ法ではこの区間内に N 個の一様乱数 x_j ($j=1 \dots N$) を発生し、積分値を

$$I = \frac{1}{N} \sum_j f(x_j) \quad (4)$$

で推定する。

このような単純なモンテカルロ法による積分は収束が悪いので、^{**} それを加速するために、積分領域をいくつかに分けて最適化するアルゴリズムが使われる。

簡単のため $f(x)$ は負にならない関数とし、図8のように

^{*} 相対誤差を固定して考えると、台形公式等の規則的なサンプル法では積分次元が N のとき、被積分関数の呼び出し回数は e^N に比例する。一方、モンテカルロ法では、誤差は積分の次元に依存せず、サンプルする点の数にのみよる。

^{**} 誤差がサンプル点の数を N として、 $1/\sqrt{N}$ で減少する。

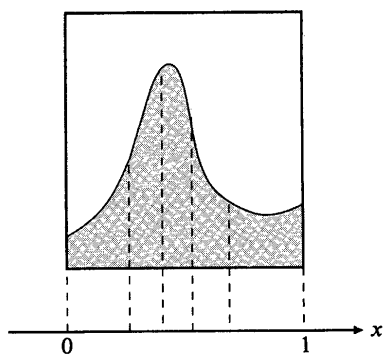


図8 積分区間の分割.

分割して、それぞれの小区間で同じ回数だけサンプルするものとする。このとき、推定値の分散を最小にするためには、各小区間内の積分値が一定になるように区間を分割すればよいことが証明される。

GRACE システムでは、このような最適化モンテカルロ積分と、イベント生成のための汎用プログラムである BASES/SPRING とのインターフェースを持っている。¹¹⁾ BASES での積分は、まず積分区間の分割が最適化されると推定される分割点をサンプルしながら探し、さらにその最適化された区間で積分を行う。また SPRING を使ったイベント生成では、この区間分割に関するパラメタファイルを参照することにより効率的なイベント生成がなされる。

しかしながら、このアルゴリズムは次のような弱点を持つ。この手法では関数をそれぞれの変数の軸に射影している。従って、関数がピークを持ち、かつそのピークがどの積分変数に対しても局所化していない場合は最適化ができない。このような「斜めの特異性」を避けるためには、適切な運動学写像を選択しなくてはいけない。このため、この段階では個々の過程に関する運動学的考察が重要となってくる。

もちろん、微分断面積におけるこのようなピークの存在は物理的によく知られている。具体的には次のような場合におきる。

- 軟特異性. 光子、グルオンなどが終状態にあるとき、そのエネルギーが0となる近くで起きる。
- 平行特異性. 同じく、質量0の粒子が平行に運動する状態から生じる特異性。
- 共鳴状態. 共鳴状態のピークに対応した位相空間内の点で起きる。
- 前方特異性. 質量0の光子などを交換する散乱では、前方でこの光子のプロパゲーターが0になる。

例えば、運動量 p の電子が運動量 k の光子を放出すると、一般にその断面積には、光子のエネルギーを ω 、両者の運動量のなす角を θ として、

$$\frac{1}{(p-k)^2 - m_e^2} = \frac{1}{2E_e\omega(1 - v_e \cos \theta)} \quad (5)$$

のような項が現れる。ここで $\omega \rightarrow 0$ が軟特異性、 $\theta \rightarrow 0$ が平行特異性である。 E_e がビームのエネルギーで 50 [GeV] とすれば、平行特異性により $E^2/m_e^2 \sim 10^{10}$ のピークがあることになるのである。もちろん、このようなときは、 ω および θ を積分変数に選べば良い。^{*}

システムはいくつか運動学写像の例をもっているので、ユーザはその番号を図2にあるように指定して断面積を計算することができる。^{**} 多数の特異性が同時に現れるような過程では、巧みな変数をとらない限り特異性をとらえきれない場合もある。さらに特異性の数のほうが変数の数よりも多く不可能に見える場合もありうる。GRACE システムに組み込まれているものがどれも適合しない場合は、ユーザが自分で対応するコードをプログラムする必要がある。^{***}

6. ループ振幅

高次補正の計算のためには、いくつかの新しい要素を導入する必要がある。ループを含む図形からは一般に紫外発散と赤外発散の2種類の発散が生じ得る。前者は繰り込みの操作により、後者は軟粒子の放射過程と合わせることににより、それぞれ有限となる。個々の図形のレベルでは発散があるので、これを何らかの方法で見かけ上有限のようにして扱う処理を正則化と呼ぶ。このとき、QCD と EWT を同一の枠組みで扱うのはやや難しい。QCD は重いクォークを別として基本的にはカイラル対称性から固有の質量を持たない理論なので赤外発散はきついが、逆に代数的な手法が適用しやすい場合がある。逆に EWT では赤外発散は QED でおなじみのタイプであるが、多数の異なる質量の粒子が含まれるので、どうしても数値的手法に頼らざるを得ない。

現在 GRACE システムでは、当面の目標を EWT の1ループ振幅の自動計算としている。正則化として、紫外発散に対して次元正則化法、つまり、ループ積分を $n = (4 - 2\epsilon)$ 次元で行うことにより紫外発散を $1/\epsilon$ の形で扱う手法を用い、赤外発散に対して光子の仮想的な微小質量 λ を導入する。^{****}

さて1ループで j 個の外線を持つ (j 点関数) 振幅は次のような形になる。

* 更に、変数として $\log(\omega/\omega_0)$, $\log(1 - v_e \cos \theta)$ などを取り、特異性を消去して使う。

** KINEM 行が存在しなかった場合、システムは運動学写像のひな型のみを生成するので、ユーザはドキュメントに従いそれらを完成させる必要がある。組み込まれている運動学写像の一覧表、および各々の変数の意味や可変パラメータ一覧などの詳しい説明はシステムに含まれるドキュメントを参照。

*** 当面している問題の物理的性質を一番理解しているのはそのユーザ自身のはずである。

**** QCD でグルオンに質量を導入することは一般にゲージ不変性をこわす。

$$T^{(j)} = \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{N(l)}{(l^2 - m_1^2 + i\epsilon)((l + p_1)^2 - m_2^2 + i\epsilon) \cdots ((l + p_1 + \cdots + p_{j-1})^2 - m_j^2 + i\epsilon)}. \quad (6)$$

次に、ファインマンパラメタを導入して分母をまとめ、ループ運動量 l をシフトして分母を平方完成する。その結果、例えば $j=3$ のとき次のような式を得る。

$$T^{(3)} = \int dx dy \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l^2(g_0 + \epsilon g_1) + f_0}{(l^2 - D_3 + i\epsilon)^3}. \quad (7)$$

ここで g_0, g_1, f_0, D_3 はファインマンパラメタ x, y の多項式で、外線の運動量や質量を係数として持ち、またベクトルの足やスピノルの構造なども一般に持つ量である。分子 g の項はループ運動量積分を $n=4$ 次元で行えば発散するが、次元正則化法により有限な結果を与える。ループ運動量 l で積分すると

$$T^{(3)} = \int dx dy \left(-2C_{UV}g_0 + g_0 - 2g_1 + \frac{f_0}{D_3 - i\epsilon} + 2g_0 \log(D_3 - i\epsilon) \right) \quad (8)$$

を得る。ここで $C_{UV} = 1/\epsilon - \gamma_E + \log 4\pi$ である。この式を計算するには、例えば

$$I_{k,h}^{(3)} = \int dx dy \frac{x^k y^h}{D_3 - i\epsilon} \quad (9)$$

のような積分が必要となる。

現在の GRACE システムでは次のようにしてループを含む場合の自動計算を行っている。

1. 指定された始・終状態の粒子からツリーおよび 1 ループのファインマン図形を生成する。1 ループと同じ次数の繰り込み相殺項を含む図形も生成される。
2. 振幅ではなく、それぞれの組み合わせに対して $\sum_{\text{spin}} M_{jk} = T_j(\text{ループ})T_k(\text{ツリー})$ を表す量を記号処理する。その場合でも同様に式 (8) が表すような形となる。ただ、 M_{jk} の場合、 g, f 等はすべてスカラー量である。そして、その g, f の表現が、記号処理システム REDUCE あるいは FORM のソースとして生成される。¹⁵⁾
3. これを REDUCE、あるいは FORM の処理系に与え、ファインマンパラメタの多項式である g, f の係数を、のちに数値計算できるような FORTRAN コードとして生成する。ここまで、 C_{UV} はある特定の変数記号としてソース中に存在する。
4. その結果とループ積分 $I_{k,h}^{(3)}$ の数値計算ライブラリを結合することにより M_{jk} の値が得られることになる。
5. 繰り込み相殺項も含めて、すべての組み合わせについて和をとり微分断面積を表す関数が (1) のように

$$\frac{d\sigma}{d\Gamma} = 2 \sum_{\text{spin}} \sum_{j,k} M_{jk} \rho \quad (10)$$

と得られる。 C_{UV} を表す変数に与える値を変えて答え

が一定であることも検算としてなされる。^{*}

今の所、いくつかの 2 体→2 体反応については結果が出ている。^{**} 機能を拡張するためには、 $j>4$ 以上のループ積分 $I_{k,h}^{(j)}$ ライブラリの開発、拡張された CHANEL ライブラリを使って M_{jk} ではなく T_j を扱えるようにすること、等が必要である。

7. 展望

本稿で議論した自動計算システムでは、2 節に示したように、ターミナルでいくつかのコマンドをタイプするだけで、結果として断面積などが得られる。通常の手計算のようにステップごとに検討を加えることはできないので、どのようにその結果を検証するかが大事になってくる。計算の誤りが生じる原因としては、数値上の大きな相殺、不適切な運動学、システム自体のバグ、などが考えられる。例えば、GRACE システムではゲージを変えて同じ位相空間内の点で行列要素の値を比較するような機能を持っている。また、ユーザが外線の粒子の割付を変えたり、コンパイラのオプションを使って計算精度を変えるなどの検討を加えることもできる。最終的な検証は、おそらく、一つの加速器で複数の実験グループが行った測定を比較するように、独立に開発されたシステム間の結果を相互に比較することではないかと考えられる。このような見地から、GRACE システム研究グループはモスクワ大学の CompHEP 開発グループと研究交流を行い、多数のツリー振幅計算に関して相互比較を行っている。いくつかのシステムが成熟していく過程で、相互比較のために、中間結果やグラフ記述、積分とのインターフェースなどの標準化作業が必要になると思われる。

ここで考えている自動計算システムは記号処理と数値計算の混合システムである。最初のダイアグラムを処理するあたりは基本的に記号処理であるが、最後に実験と比較すべき断面積は数値の世界である。各種のシステムの特徴は、この両者をどこで使い分けるかにあると言える。もちろん、行列要素を積分するところまでを、すべて記号処理により行ってしまうことも原理的には可能であるが、実際に行われる巨大な計算においては殆ど実際的ではないと考えられる。とすると、結果を出すまでの作業の流れの中で、最もコンピューターのパワーを消費するのは数値積分のステップである。ここでは運動学写像の選択が重要であり、システムに対して、領域を分割したり、適切な写像を自動的に選択するといった、より人工知能的な機能が期待される。また、別の対策として、任意の被積分関数に対して、その

^{*} もちろん繰り込み理論では相殺するはずであるが、システムの検証のために行う。

^{**} Feynart/calc も 1 ループの 2-2 反応について計算することができる。

特異領域を自動的に検知して積分するような、実用性のある積分プログラムの開発も検討に値するであろう。

今まで述べてきたような自動計算システムは今後の実験の進展につれて、ますます重要性を増すものと思われる。今後期待されることは、まず適用できるモデルを拡張することであろう。既に、いくつかのグループで超対称性理論や非ゲージ相互作用の頂点などを導入する作業が進められており、本稿が印刷されるころには、もうできているかも知れない。更にユーザがラグランジアンを指示するだけで自動的にファインマン規則をも生成してくれるようなシステムも考えられる。また、核子や光子のビームのために構造関数を導入することも重要である。^{*} 1 ループの自動化はまだ適用範囲が限られているが、いずれツリー振幅と同じような水準に届くと思われる。2 ループ以上への拡張は更に野心的な試みである。これからの展開に期待したい。

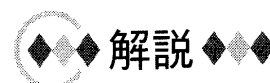
本稿をまとめるにあたり、KEK・南建屋グループ、ロシア・モスクワ大学の CompHEP グループ、フランス・LAPP 研究所の共同研究グループの方々に大変お世話になりましたことを感謝します。

参考文献

- 1) 日本物理学会誌 35 (1980) 1—特集「統一理論とその周辺」, 森 俊則:

^{*} CompHEP など既に可能なものもある。

- 日本物理学会 50 (1995) 441. 戸塚洋二:『素粒子物理』(岩波書店, 1993).
- 2) 近藤都登, 三品昌紀: 日本物理学会誌 49 (1994) 491.
- 3) 中西 襄:『ファインマン・ダイアグラム』(丸善, 1993).
- 4) *New Computing Techniques in Physics Research*, Vol. 1, ed. D. Perret-Gallix, W. Wojcik, et al. (Editions du CNRS, 1990), Vol. 2, ed. D. Perret-Gallix, et al. (World Scientific, 1992), Vol. 3, ed. K.-H. Becks, D. Perret-Gallix, et al. (World Scientific, 1994).
- 5) E. E. Boos, et al.: 参考文献 4 の Vol. 1. および Vol. 2. A. E. Puhkov: 参考文献 4 の Vol. 3.
- 6) R. Mertig, M. Böhm and A. Denner: *Comput. Phys. Commun.* 64 (1991) 345. J. Küblbeck, M. Böhm and A. Denner: *ibid.* 60 (1990) 165.
- 7) T. Stelzer and W. F. Long: *Comput. Phys. Commun.* 81 (1994) 357.
- 8) T. Kaneko: 参考文献 4 の Vol. 2. T. Ishikawa, et al.: KEK Report 92-19 (1993).
- 9) P. Nogueira: *J. Comput. Phys.* 58 (1986) 127. T. Kaneko: KEK preprint 94-83 (1994).
- 10) H. Tanaka: *Comput. Phys. Commun.* 58 (1990) 153.
- 11) S. Kawabata: *Comput. Phys. Commun.* 41 (1986) 127; 投稿準備中.
- 12) E. Murayama, I. Watanabe and K. Hagiwara: KEK Report 91-11 (1992).
- 13) a: H. Tanaka, et al.: *Comput. Phys. Commun.* 64 (1991) 149. b: E. E. Boos, et al.: *Int. J. Mod. Phys. C* 5 (1994) 615. c: Y. Kurihara and R. Najima: *Phys. Lett. B* 301 (1993) 292. d: J. Fujimoto, et al.: *ibid.* 304 (1993) 189. e: M. Dubinin, et al.: *ibid.* 329 (1994) 379. f: E. E. Boos, et al.: *ibid.* 326 (1994) 190. g: T. Ishikawa, et al.: KEK Preprint 92-210 (1993). h: J. Fujimoto, et al.: *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* 37B (1994) 169.
- 14) J. Fujimoto, et al.: *Progr. Theor. Phys.* 87 (1992) 1233. K. Kato, et al.: 参考文献 4 の Vol. 3.
- 15) A. C. Hearn: The Rand Corporation, 1987. J. A. M. Vermaseren: CAN, Amsterdam, 1990.



相互作用するボゾン模型——その基礎づけの現状——

吉 永 尚 孝

〈埼玉大学理学部物理学教室 338 埼玉県浦和市下大久保 255 e-mail: YOSHINAGA@tkyax2.phys.s.u-tokyo.ac.jp〉

大 塚 孝 治

〈東京大学理学部物理学教室 113 東京都文京区本郷 7-3-1 e-mail: OTSUKA@tkyax2.phys.s.u-tokyo.ac.jp〉

原子核における相互作用するボゾン模型の微視的基礎づけの現状について、殻模型計算を用いて論じる。また、(1) バレンス核子対の近似、(2) ボゾンマッピング、という2項目についてテストを行う。さらに最近の相互作用するボゾン模型のパラメーターの微視的な導出の研究について紹介する。

§ 1. 相互作用するボゾン模型とは何か

相互作用するボゾン模型 (Interacting Boson Model; 以下 IBM と略称) が有馬と Iachello によって世に出て早くも20年以上が経過した。¹⁻⁴⁾ 原子核中の多数の核子が揃って運動し、振動・回転などのモードとして現れる原子核の集団運動について、この模型は実験データを良く再現し、また、大変見通しのよい記述を与えてきた。最近、この模

型の拡張による高スピン状態や超変形状態の記述、原子核回転の長年の宿題であるガンマ不安定回転や、後述の陽子と中性子の混合対称状態の検証、量子カオスへの応用などが新たに話題になっている。⁵⁾

それらの研究と並行して、IBM をより基本的なレベルから導出する、微視的基礎づけと呼ばれる研究も行われてきた。これは具体的には、フェルミオン系である核子多体