

## 1 はじめに

湯川先生の中間子論に代表されるように，素粒子現象における重要な考え方は「力は場であり，場は粒子である」というものである。Fig.1 は，電磁気力を例として，力を場の粒子で考える理論形式の説明である。ここでは電荷を持つ素粒子として2つの電子を考えている。左の図は電荷を持つ粒子同士の間で電磁力が働くことを表している。一方量子論で学んだように，電子は光子を吸収したり（光電効果），放出したり（原子のスペクトル）する。そこで，右の図のように電子が光子を放出・吸収することにより電子間に力が働くと考えることができる。ここで波線は光子  $\gamma$  を表す。力の場合と同様，2つの電子は対等だから，一方が光子を放出して，片方が吸収することは2通り考えられ，それをまとめて表現している。光子はエネルギーや運動量を担っており，その放出・吸収により，電子の運動量に変化する。つまり，力が働いたことになる。

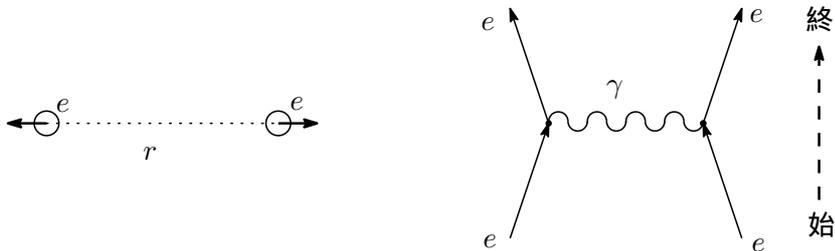


図 1: 電子の間に力が働く

この Fig.1 の右の記述での素過程は，ある時空点  $x$  で，

- 始状態の電子が消滅する
- 光子が生成される（あるいは消滅される）
- 終状態の電子が生成される

と表現される。この記述を行うためには，時空の各点で，素粒子の生成・消滅を表す量が必要となる。それが場の演算子である。電磁気力を表す理論形式には，ゲージ変換の自由度がある。そのことを一般化して力を媒介する光子などの場はゲージ場とみなされる。

この講義で扱う標準模型は 20 世紀に完成した素粒子力学であり，量子色力学 (QCD) と電弱理論 (EW) から成る。それを記述する枠組みが場の量子論である。

いま「枠組み」と書いた。ただ，これは通常の理論的な枠組みとは少し状況が異なる。例えばニュートン力学であれば，数学的には微分方程式である運動方程式  $F = ma$  が理論

の枠組みであり、 $F$  に任意の力を設定することができる。ところが素粒子力学の場合、理論のラグランジアンが与えられれば、それから原理的にはすべての観測量が導かれる。そして、そのラグランジアンは、以下を要求すると、ほぼユニークに決定されてしまう。

- 理論の枠組みとして、相対論的な量子場の理論を採用する。
- 観測される素粒子は相対論的な表現に従う。
- 観測される素粒子の力に対応する保存量、量子数の対称性はゲージ対称性を満たす。
- 繰り込み可能な理論である。

今、以上で決定されると書いたのであるが、標準理論の理解にはもう一つ重要な因子がある。

- 自発的対称性の破れとヒッグス機構による質量の生成

弱い力に対するゲージ粒子を考えると、それは実験結果より、質量を持つ粒子である必要がある。ところが、電磁気力での光子のような質量が0の粒子と異なり、質量のあるゲージ粒子を単純に理論に持ち込むと、ゲージ対称性や繰り込みがうまくいかない。このために導入されたのが、まずゲージ粒子をすべて質量0としておき、ヒッグス機構により結果的に質量のあるゲージ粒子とする処方であった。このとき導入されたヒッグススカラー場は、物質粒子であるフェルミオンとも結合し、その質量項をつくることのできることで、「質量の起源」と呼ばれるようになったのである。

上記の原則について、もう少し付言しておく。まず、ゲージ対称性であるが、このため、相互作用を表す複数の結合定数の間に一定の関係が生じる。よって、理論にはいるパラメタの数が制限され、ラグランジアンに強い制約を与える。その関係は繰り込みの後でも維持されるため、繰り込み条件の設定にも深く関係する。また、理論が繰り込み可能であるということにより、ラグランジアンに制約が発生するが、繰り込み可能であるということになれば、その繰り込み処方の自由度から、逆に重要な情報を引き出すことができる。それが繰り込み群の考え方である。これにより、例えば、調べているエネルギースケールでの有効結合定数の値を決めることができる。

物理学は理論と実験を相互に比較することによって進化するものである。上に述べたように、量子場の理論はラグランジアンを与えれば決まるので、あとはその理論的予言量を計算し実験結果と比較すれば良い。ところが、残念ながら、量子場の理論は相互作用のある場合、簡単には解けない。これは、その理論形式が無限自由度を持つからである。そのため、解法としては次のいずれかが考えられる。

- 自由度を離散無限として解く。さらに、それから有限自由度系を作り、シミュレーションにより解く（格子ゲージ理論）
- 自由場は解けるので、それを出発点として逐次近似により解く（摂動展開）

この講義では、相対論・量子論の基本的な内容、場の理論の初歩、どのような素粒子どのような基本的な力があるかという知識、あたりまでを前提として、後者の摂動展開により場の量子論を解いて、実験的な測定量を計算するために、どのような手法が使われているかを紹介する。より詳細な計算方法や、自動計算システム GRACE については引き続き講義で論じられる予定である。

## 2 測定量の計算

あるプロセスが起きる確率は始状態  $i$  と終状態  $f$  の間の行列要素  $S_{fi}$  により決まる。

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi} \quad (1)$$

ここで第1項は相互作用がなかった場合の項である。量子論に従い、あるプロセス  $i \rightarrow f$  の起きる確率は行列要素の絶対値の自乗と終状態の位相空間  $d\rho_f$  の積で与えられる(注1)。

$$w_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 VT d\rho_f \quad (2)$$

ここで  $V, T$  は(無限大の)全空間と全経過時間を表している。また、終状態の4次元運動量が  $p_1, p_2, \dots, p_n$  である、 $n$  粒子の位相空間は(注2)

$$d\rho_f = \prod_{j=1}^n \frac{V d^3 \vec{p}_j}{(2\pi)^3} \quad (3)$$

である。

素粒子反応として通常われわれが必要なものは次の2つである。

- 1) 崩壊,  $0 \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$
- 2) 散乱,  $a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$

単位時間あたりの崩壊確率(幅)を  $\Gamma$  とすると、

$$d\Gamma = \frac{w_{fi}}{T} = V(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 d\rho_f \quad (4)$$

である。

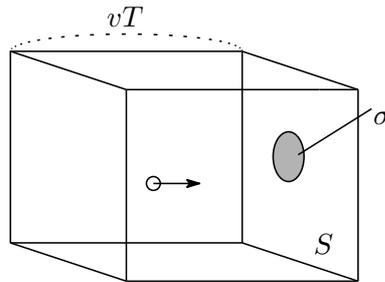


図 2: 散乱断面積

また、散乱断面積  $\sigma$  は、Fig.2 を参照すると、粒子が体積  $V$  に1つあるとしているので、

$$w_{fi} = \frac{\sigma}{S} \times \frac{S(vT)}{V} \quad (5)$$

より、

$$d\sigma = \frac{V w_{fi}}{v_{rel} T} = \frac{V^2}{v_{rel}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 d\rho_f \quad (6)$$

である。ここで  $v_{rel}$  と書いたのは、双方の粒子が運動している場合も含めるためである。

ここで、場の演算子との関係を簡単にするため、始状態と終状態の粒子ごとに、因子  $\sqrt{2EV}$  を振幅に押し付けて（理由は次の節）、 $T$  と  $\rho_f$  を次のように再定義する。

$$\prod_i \sqrt{2E_j V} T_{fi} \prod_f \sqrt{2E_j V} \Rightarrow T_{fi} \quad (7)$$

$$d\rho_f \Rightarrow d\rho_f = \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_j}{(2\pi)^3 (2E_j)} \quad (8)$$

すると、崩壊確率および断面積として以下の表現を得る。なお、必要な量を求めるためには、終状態の位相空間での積分が必要であるが、ここでは積分記号は省略した。

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 d\rho_f \quad (9)$$

$$d\sigma = \frac{1}{v_{rel}} \frac{1}{4E_a E_b} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 d\rho_f \quad (10)$$

なお

$$v_{rel} = \left| \frac{\vec{p}_a}{E_a} - \frac{\vec{p}_b}{E_b} \right| \simeq \begin{cases} 1 & \text{超相対論的で固定標的} \\ 2 & \text{超相対論的で衝突} \end{cases} \quad (11)$$

である。

(注1)

デルタ関数はいろいろな表現があるが、以下を使っている。

$$\delta(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{ipx} \quad (12)$$

デルタ関数が自乗されているので、片方からもう一方の引数は自動的に0となるので、そちらが ( $p, x$  は4次元ベクトル)

$$\delta^{(4)}(0) = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{ipx} \Big|_{p=0} = \frac{VT}{(2\pi)^4} \quad (13)$$

となったのである。

(注2)

空間  $V$  での運動量  $\vec{p}$  の自由粒子（平面波）の波動関数は

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (14)$$

である。周期性境界条件により（箱式規格化）

$$p_x L = 2\pi n_x, \quad p_y L = 2\pi n_y, \quad p_z L = 2\pi n_z \quad (15)$$

なので、1自由度あたりの運動量空間の体積は

$$\frac{L^3 \delta p_x \delta p_y \delta p_z}{(2\pi)^3} = \frac{V d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \quad (16)$$

である。

### 3 量子場の例

自由な（相互作用をしていない）スカラー場を考える。（場の2次形式のみから成るラグランジアンでは，場の方程式が線形になるので重ね合わせの原理が成り立つ。よって，相互作用しないから自由場である。場の3次以上の項が相互作用となる。）

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (17)$$

であり，量子論の基本的対応関係

$$E \cdots i \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x \cdots -i \frac{\partial}{\partial x}, \dots \quad (18)$$

を考慮すると，スカラー粒子の波動関数は

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi - \left(-i \vec{\nabla}\right)^2 \psi = m^2 \psi \quad \rightarrow \quad (\square + m^2) \psi = 0 \quad (19)$$

を満たす（クライン・ゴールドン方程式） $(\square = \partial^\mu \partial_\mu)$

この方程式の基本解は

$$e^{-ipx} = e^{-iEt + i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \quad e^{ipx} = e^{+iEt - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (20)$$

である。通常，粒子の波動関数は前者になる。

場の演算子を作る準備として，消滅生成演算子  $a_p, a_p^\dagger$  を導入する。（この  $p$  は空間運動量の3ベクトルである）。その交換関係は以下で与えられる。

$$[a_p, a_{p'}] = 0, \quad [a_p^\dagger, a_{p'}^\dagger] = 0, \quad [a_p, a_{p'}^\dagger] = \delta_{p,p'} \quad (21)$$

ここでスカラー場

$$\phi(x) = \sum_{\vec{p}} \left( f(p) a_p + f(p)^* a_p^\dagger \right) \quad (22)$$

を導入する。 $f(p), f(p)^*$  は対応する運動量の波動関数である。

$$f(p) = C_p e^{-ipx}, \quad f(p)^* = C_p^* e^{ipx} \quad (23)$$

である。規格化係数は以下のようにして定まる。

クライン・ゴールドン方程式を与えるラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (24)$$

である（ $L$  はラグランジアン密度で， $\mathbf{L} = \int d^3x L$  がラグランジアンである）。通常の力学と同様，これからハミルトニアンが  $H = \sum p_j \dot{q}_j - L$  により決まる。その結果スカラー量子場のハミルトニアン（密度）は

$$H = \frac{1}{2} \left( \dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 \right) + \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (25)$$

である。この、ハミルトニアンを具体的に計算する。

$$\mathbf{H} = \int d^3x H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2) + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right] \quad (26)$$

すると（簡単のため、 $C_p$  を実数として）、例えば  $\phi^2$  の項は

$$\phi^2 = \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} C_p C_{p'} \left\{ e^{-ipx - ip'x} a_p a_{p'} + e^{-ipx + ip'x} a_p a_{p'}^\dagger + e^{+ipx - ip'x} a_p^\dagger a_{p'} + e^{+ipx + ip'x} a_p^\dagger a_{p'}^\dagger \right\} \quad (27)$$

となる。ここで、積分して残るのは指数関数の肩が0となるところだけであるので、

$$\int d^3x \phi^2 = \sum_{\vec{p}} C_p^2 \left\{ a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p \right\} V = 2 \sum_{\vec{p}} (C_p^2 V) \left( N_p + \frac{1}{2} \right) \quad (28)$$

となる。ここで  $N_p = a_p^\dagger a_p$  は個数演算子である。同様に他の項も計算して、

$$\mathbf{H} = \int d^3x H = \sum_{\vec{p}} (C_p^2 V) (E_p^2 + \vec{p}^2 + m^2) \left( N_p + \frac{1}{2} \right) \quad (29)$$

となる。ここで、

$$C_p = \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} \quad (30)$$

とすれば、

$$\mathbf{H} = \sum_{\vec{p}} E_p N_p + (\text{constant}) \quad (31)$$

となり、ハミルトニアンとして適切なものとなる。

前の節で、行列要素  $T_{fi}$  に押し付けた因子がこの規格化定数である。外線（始状態と終状態）に現れる波動関数は  $C_p$  を除いたものとしてよい。

前の節にも出てきた関係式だが、箱式規格化からデルタ関数式規格化に移るときは

$$\sum_{\vec{p}} \Rightarrow \int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\vec{p} \quad (32)$$

と置き換える。このときスカラー場は

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{V}{2E_p}} \left( e^{-ipx} a_p + e^{ipx} a_p^\dagger \right) \quad (33)$$

となり、演算子の交換関係は

$$[a_p, a_{p'}] = 0, \quad [a_p^\dagger, a_{p'}^\dagger] = 0, \quad [a_p, a_{p'}^\dagger] = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (34)$$

となる。

以下、自由場について、ラグランジアンと場の方程式を示す。

1. 中性スカラー場，質量  $m$ （これは上で詳しく議論した）

$$L = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (35)$$

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (36)$$

2. 複素スカラー場，質量  $m$

$$L = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (37)$$

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (\square + m^2)\phi^* = 0 \quad (38)$$

この場は2自由度である。必要に応じ  $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$  と分解できる。

粒子と反粒子の区別があるので，2組の消滅生成演算子がある。波動関数  $f(p)$  は中性スカラーと同じである。

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{\vec{p}} \left( f(p) a_p + f(p)^* b_p^\dagger \right) \\ \phi^*(x) &= \sum_{\vec{p}} \left( f(p) b_p + f(p)^* a_p^\dagger \right) \end{aligned} \quad (39)$$

3. ベクトル場，質量0（電磁場）

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (40)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (41)$$

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (42)$$

4. ベクトル場（Proca 場），質量  $m$

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu \quad (43)$$

$$(\square + m^2)A^\mu = 0 \quad (44)$$

（この場合， $\partial_\mu A^\mu = 0$  が自動的に成り立つ。）

3つの偏りがあるので，それを  $\lambda$  でラベルする。

$$A^\mu(x) = \sum_{\vec{p}, \lambda} \left( f(p, \lambda) a_{p\lambda} + f(p, \lambda)^* a_{p\lambda}^\dagger \right) \quad (45)$$

波動関数は

$$f(p, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} \varepsilon_\lambda^\mu(p) e^{-ipx} \quad (46)$$

となる。ここで  $\varepsilon_\lambda^\mu(p)$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) は偏りのベクトルである。偏りのベクトルは規格化条件，直交条件

$$g_{\mu\nu} \varepsilon_\lambda^\mu(p) \varepsilon_{\lambda'}^\nu(p) = -\delta_{\lambda, \lambda'}, \quad \varepsilon_\lambda^\mu(p) p_\mu = 0 \quad (47)$$

を満たす。

5. フェルミ場, 質量  $m$  (ガンマ行列は付録などを参照)

$$L = \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m)\psi \quad (48)$$

$$(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} + m) = 0 \quad (49)$$

ここで  $\bar{\psi} = (\psi)^{\dagger}\gamma^0$  である。第2の式で微分は左へかかる。

フェルミオンは運動量  $p$  とスピン  $s$  でラベルされる。

$$\psi(x) = \sum_{\vec{p}, s} \left( f_b(p, s)b_{ps} + f_d(p, s)d_{ps}^{\dagger} \right) \quad (50)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{\vec{p}, s} \left( \bar{f}_d(p, s)d_{ps} + \bar{f}_b(p, s)b_{ps}^{\dagger} \right) \quad (51)$$

波動関数は

$$f_b(p, s) = \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} u(ps)e^{-ipx}, \quad f_d(p, s) = \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} v(ps)e^{+ipx} \quad (52)$$

となる。ここで  $u, v$  は4成分スピノルであり, 運動方程式と規格化条件

$$(\gamma \cdot p - m)u(ps) = 0, \quad (\gamma \cdot p + m)v(ps) = 0, \quad \bar{u}(ps)u(ps) = 2m \quad (53)$$

を満たす。

## 4 プロパゲーター

摂動計算の詳細に入る前に、重要な概念であるプロパゲーター（2点グリーン関数）を議論しておく。まず、次の量を計算する。ここで  $|0\rangle$  は真空であり、 $a_p|0\rangle = 0, \langle 0|a_p^\dagger = 0$  となる。

$$D(x-y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle \quad (54)$$

これに  $\phi$  の具体的な展開形を代入すると

$$D(x-y) = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2E_p V} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} \quad (55)$$

となる。ここで、Eq.(32) を使って、デルタ関数式規格化に移った。次に留数定理  $\oint f(z)/(z-a)dz = (2\pi i)f(a)$  を

$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2} = \frac{1}{p_0^2 - E_p^2} = \frac{1}{2E_p} \left( \frac{1}{p_0 - E_p} - \frac{1}{p_0 + E_p} \right) \quad (56)$$

と合わせて使うと

$$D(x-y) = \oint \frac{dp_0}{2\pi i} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (57)$$

となる。ここで、 $p_0 = E_p$  のまわりの積分路を、 $p_0$  軸全体に伸ばすことができれば、4次元運動量空間での積分として表現できる。そのためには、被積分関数が無限遠方で消えてくれる必要がある。

上の関係式を変形して、ファインマン・プロパゲーター  $D_F$  を導入する。

$$D_F(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (58)$$

ここで  $\epsilon$  は正の無限小の量である。

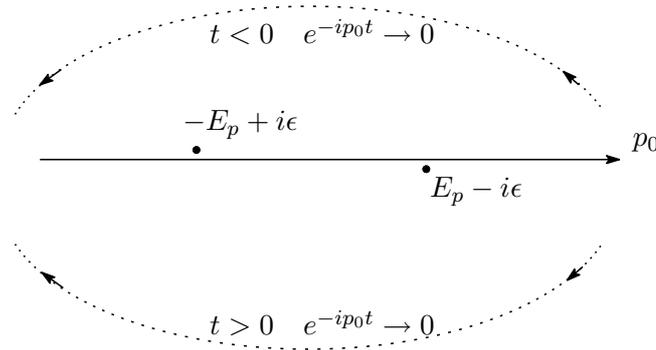


図 3:  $D_F$  の積分路

Fig.3 にあるように考えると、

- $x_0 - y_0 > 0$  のとき、下平面を時計回りに回り、 $p_0 = E_p$  の極を拾う

- $x_0 - y_0 < 0$  のとき，上平面を反時計回りに回り， $p_0 = -E_p$  の極を拾う

となるので，

$$D_F(x - y) = \begin{cases} D(x - y) & x_0 > y_0 \\ D(y - x) & x_0 < y_0 \end{cases} \quad (59)$$

であることがわかる。よって，

$$D_F(x - y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle & x_0 > y_0 \\ \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle & x_0 < y_0 \end{cases} \quad (60)$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (61)$$

となる。 $T$  は経時積をあらわす記号である。後で見ると，摂動計算では，場の演算子を時間の順序に並べることになるので，この経時積で与えられるファインマン・プロパゲーターが使われる。

具体的な計算では，運動量表示のプロパゲーターが使われる。添え字  $F$  はもはや必要がないので，その場合は

$$D(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (62)$$

とする。

グリーン関数と呼ぶ意味は以下のとおりである。場を古典量と考えたとき，方程式

$$(\square + m^2)\psi(x) = -J(x) \quad (63)$$

の解は

$$(\square + m^2)_x G(x, y) = -\delta^{(4)}(x - y) \quad (64)$$

となる，グリーン関数を用いて

$$\psi(x) = \int d^4 y G(x, y) J(y) \quad (65)$$

となる。ここで得られた  $D_F(x - y)$  は，虚数を除き，Eq.(64) を満たしている。グリーン関数はソース  $J$  の  $y$  での値から  $x$  での場が決まる様子を表していることになるので， $y$  から  $x$  への場の「伝播」を意味している。

質量をもつベクトル粒子の場合，Eq.(47) の性質を持つ偏りのベクトルが分子に現れる。

$$D_F(x - y) = \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i \sum_\lambda \varepsilon_\lambda^\mu(p) \varepsilon_\lambda^\nu(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (66)$$

この和であるが，具体的な例として，質量殻上にある 4 次元運動量  $p = (E, 0, 0, P)$  として，Eq.(47) を使うと

$$\varepsilon_1^\mu(p) = (0, 1, 0, 0), \quad \varepsilon_2^\mu(p) = (0, 0, 1, 0), \quad \varepsilon_3^\mu(p) = \frac{1}{m}(P, 0, 0, E) \quad (67)$$

から

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda^\mu(p) \varepsilon_\lambda^\nu(p) = \begin{pmatrix} P^2/m^2 & 0 & 0 & EP/m^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ EP/m^2 & 0 & 0 & E^2/m^2 \end{pmatrix} = -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \quad (68)$$

と表現できることがわかる。

$$D^{\mu\nu}(p) = \frac{i(-g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu / m^2)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (69)$$

フェルミ粒子の場合, Eq.(53) の性質を持つ偏りのベクトルが分子に現れる。

$$D_F(x-y) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0 \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i \sum_s u(ps)\bar{u}(ps)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (70)$$

この分子の和は質量殻上にある 4 次元運動量の場合,  $\gamma \cdot p + m$  となるので, フェルミオンのプロパゲーターは

$$D_F(x-y) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0 \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma \cdot p + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (71)$$

である。

## 5 摂動展開

まずは量子論でのシュレディンガー表示から考える。ハミルトニアンを自由場  $\mathbf{H}_0$  と相互作用  $\mathbf{H}_I$  の和とする。

$$i\frac{d\psi}{dt} = (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_I)\psi \quad (72)$$

相互作用表示に移る。ユニタリ変換

$$e^{i\mathbf{H}_0 t}\mathbf{H}_I e^{-i\mathbf{H}_0 t} = \mathbf{H}_I(t), \quad \Psi = e^{i\mathbf{H}_0 t}\psi \quad (73)$$

により,

$$i\frac{d\Psi}{dt} = \mathbf{H}_I(t)\Psi \quad (74)$$

となる。 $\Psi$  の時間発展は

$$\Psi(t + \delta t) = (1 - i\mathbf{H}_I(t)\delta t)\Psi(t) \quad (75)$$

となる。これを積み重ねると,

$$\Psi(t_f) = \mathsf{T} \exp \left[ -i \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{H}_I(t) dt \right] \Psi(t_i) \quad (76)$$

となる。ここで、 $\mathsf{T}$  は経時積の記号で、演算子は右から左に時間の経過する順序に並べるものとする。

場の理論では、前の節まで見てきたように、場の量の 2 次の項が自由場のハミルトニアン  $\mathbf{H}_0$  に対応し、3 次以上が相互作用となる。

$$S_{fi} = \langle f | \mathsf{T} \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_I dt \right] | i \rangle = \langle f | \mathsf{T} \exp \left[ i \int L_I(x) d^4x \right] | i \rangle \quad (77)$$

$$= \delta_{fi} + \sum_{n=1} \frac{1}{n!} \langle f | \mathsf{T} \left( i \int L_I(x) d^4x \right)^n | i \rangle \quad (78)$$

$$= \delta_{fi} + \sum_{n=1} \frac{1}{n!} \langle f | \mathsf{T} \left( i \int L_I(x_1) d^4x_1 \right) \left( i \int L_I(x_2) d^4x_2 \right) \cdots \left( i \int L_I(x_n) d^4x_n \right) | i \rangle \quad (79)$$

が行列要素の表現となる。ここで  $L_I(x)$  は相互作用ラグランジアンである。始状態、終状態は例えば  $a + b \rightarrow 1 + 2 + \cdots$  というスカラーの散乱であれば

$$\begin{aligned} |i\rangle &= a_{p_a}^\dagger a_{p_b}^\dagger |0\rangle \\ \langle f| &= \langle 0| a_{p_1} a_{p_2} \cdots \end{aligned} \quad (80)$$

となる。

この Eq.(79) を評価するため、ウィックの定理 (簡易版) を導入する。生成消滅演算子  $a_p^\dagger, a_p$  の対を真空ではさんだ場合、寄与が残るのは  $\langle 0| a_p a_p^\dagger |0\rangle = 1$  の場合だけである。これ以外の組み合わせは 0 となる。また、異なる種類の場の演算子の対はすべて 0 である。 $N = 2n$  個の演算子の積の列があったとき、以下が成り立つ。

(定理)  $N = 2n$  個の演算子の積の真空期待値  $A_N$

$$A_N = \langle 0 | \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_N | 0 \rangle \quad (81)$$

(この  $\alpha_j$  は、生成、消滅のいずれかを表す) は、条件を満たす可能な 2 個の演算子の対の真空期待値の積のすべての和に等しい。つまり、

$$A_N = \sum \sigma \langle 0 | \alpha_{j_1} \alpha_{k_1} | 0 \rangle \langle 0 | \alpha_{j_2} \alpha_{k_2} | 0 \rangle \cdots \langle 0 | \alpha_{j_n} \alpha_{k_n} | 0 \rangle \quad (82)$$

である。ここで  $j_1, k_1, j_2, k_2, \dots$  は  $1, 2, 3, \dots, N$  の可能な並べ替えであるが、「もともと左にあった演算子は対でも左側にある」ことが条件である。もちろん対を入れ替えて二重に数えてはいけない。 $\sigma = \pm 1$  であり、フェルミオンの演算子は反可換なので、元の順序と、展開後の順序との間の入れ替えが奇数回である場合は  $\sigma = -1$  となる。

なお、上の条件を式で書けば、

$$j_x < k_x, \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_n \quad (83)$$

となる。左が対の演算子の順序に対して、右が二重に数えることを禁止する条件である。この定理の例を示す。

$$\begin{aligned} & \langle 0 | a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger | 0 \rangle \\ = & \langle 0 | a_1 a_2 | 0 \rangle \langle 0 | a_3^\dagger a_4^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | a_1 a_3^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_2 a_4^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | a_1 a_4^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_2 a_3^\dagger | 0 \rangle \\ = & \delta_{13} \delta_{24} + \delta_{14} \delta_{23} \end{aligned} \quad (84)$$

この展開を簡略に表すために以下のように記す。演算子の上の線は、その対を縮約することを表している。

$$\overbrace{a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger} + \overbrace{a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger} + \overbrace{a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger} \quad (85)$$

実際にはさきほど注意したように、自動的に 0 になる項 (上の例では第 1 項) があり、それは書く必要はない。

さて、Eq.(79) の評価に戻る。この式には場の演算子の積が含まれているが、それは生成消滅演算子の線形結合であるので、同じように縮約でき、結果としてプロパゲーターとなる。また、外線粒子の演算子と場の演算子が縮約された場合は対応する波動関数 (場の演算子の中の係数) が ( $\sqrt{2EV}$  を乗じたものとして) 出てくる。例えば

$$\langle 0 | \phi(x) a_p^\dagger | 0 \rangle = e^{-ipx} \quad (86)$$

である。

具体的な事例として、3 種類のスカラー  $\phi, \chi, \eta$  が相互作用している系を考える。

$$L_0 = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_1^2 \phi^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu \chi)^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \chi^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta)^2 - \frac{1}{2} m_3^2 \eta^2 \quad (87)$$

$$L_I = g \phi \chi \eta \quad (88)$$

$g$  は結合定数であり、このスカラー同士の間働く力の強さを表している。もちろん、この  $g$  が「小さい」ことが、今やっている摂動展開の妥当性と関係している。

そして次のプロセスを考えよう。

$$\phi(p_1) + \chi(p_2) \rightarrow \phi(p_3) + \chi(p_4) \quad (89)$$

Eq.(79) の 2 次の項 ( $n = 2$ ) を考えると、それは

$$\frac{1}{2!} \langle 0 | a_{p_3}^\phi a_{p_4}^\chi T \left( ig \int \phi(x_1) \chi(x_1) \eta(x_1) d^4 x_1 \right) \left( ig \int \phi(x_2) \chi(x_2) \eta(x_2) d^4 x_2 \right) a_{p_1}^{\phi, \dagger} a_{p_2}^{\chi, \dagger} | 0 \rangle \quad (90)$$

となる。演算子 10 個の積と考えると、演算子の縮約を実行する。繰り返しになるが、異なる種類の場の間での縮約は不必要であるので除く。

$$\begin{aligned} (i) & \quad a_{p_3}^\phi a_{p_4}^\chi \phi(x_1) \chi(x_1) \eta(x_1) \phi(x_2) \chi(x_2) \eta(x_2) a_{p_1}^{\phi, \dagger} a_{p_2}^{\chi, \dagger} \\ (ii) & \quad + a_{p_3}^\phi a_{p_4}^\chi \phi(x_1) \chi(x_1) \eta(x_1) \phi(x_2) \chi(x_2) \eta(x_2) a_{p_1}^{\phi, \dagger} a_{p_2}^{\chi, \dagger} \\ (iii) & \quad + a_{p_3}^\phi a_{p_4}^\chi \phi(x_1) \chi(x_1) \eta(x_1) \phi(x_2) \chi(x_2) \eta(x_2) a_{p_1}^{\phi, \dagger} a_{p_2}^{\chi, \dagger} \\ (iv) & \quad + a_{p_3}^\phi a_{p_4}^\chi \phi(x_1) \chi(x_1) \eta(x_1) \phi(x_2) \chi(x_2) \eta(x_2) a_{p_1}^{\phi, \dagger} a_{p_2}^{\chi, \dagger} \\ (v) & \quad + a_{p_3}^\phi a_{p_4}^\chi \phi(x_1) \chi(x_1) \eta(x_1) \phi(x_2) \chi(x_2) \eta(x_2) a_{p_1}^{\phi, \dagger} a_{p_2}^{\chi, \dagger} \end{aligned}$$

さて、この 5 項の展開を良く見ると、(i) と (iii)、(ii) と (iv) は同じものであることが分かる。実際これは、座標  $x_1, x_2$  の入れ替えを行ったものとなっている。このような事情はいつでも成立するので、結果として（同種粒子や特殊な組み合わせの場合を除き）指数関数の展開に出てくる  $\frac{1}{n!}$  は、座標の入れ替えに吸収される。よって、以下では (iii) と (iv) は考えない。(v) はちょっと置いておく。(i)、(ii) を、係数や積分も含めて式に表したものが以下である。また対応する図式表示（ファインマン・ダイアグラム）を Fig.4 に示した。

$$S_{fi}^{(i)} = (ig)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{ip_3 x_1} e^{ip_4 x_1} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_3^2 + i\epsilon} e^{-ik(x_1 - x_2)} e^{-ip_1 x_2} e^{-ip_2 x_2} \quad (91)$$

$$S_{fi}^{(ii)} = (ig)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{ip_3 x_2} e^{ip_4 x_1} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_3^2 + i\epsilon} e^{-ik(x_1 - x_2)} e^{-ip_1 x_1} e^{-ip_2 x_2} \quad (92)$$

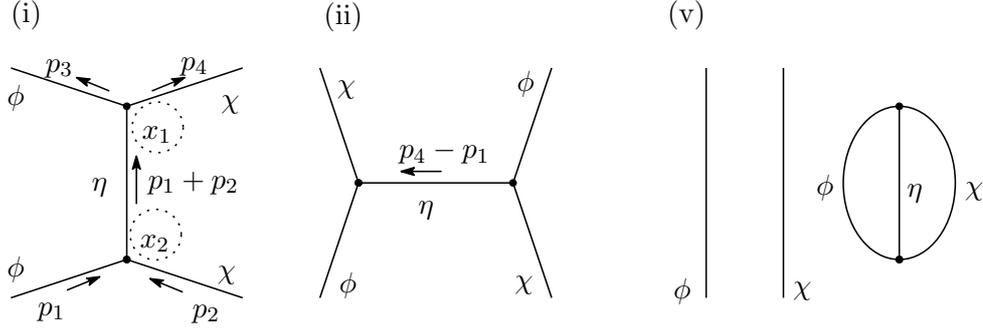


図 4: 散乱過程  $\phi(p_1) + \chi(p_2) \rightarrow \phi(p_3) + \chi(p_4)$

ここで座標  $x_1, x_2$  の積分を実行すると、運動量のデルタ関数となる。これは、各相互作用の起きた場所での 4 次元運動量の保存を表している。

$$S_{fi}^{(i)} = (ig)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - p_1 - p_2) \frac{i}{k^2 - m_3^2 + i\epsilon} \quad (93)$$

$$S_{fi}^{(ii)} = (ig)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4 - p_1 - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + p_3 - p_2) \frac{i}{k^2 - m_3^2 + i\epsilon} \quad (94)$$

さらに、プロパゲーターに付随した運動量積分  $d^4k$  を実行すると、全体の運動量保存を表すデルタ関数  $(2\pi)^4 \delta(p_4 + p_3 - p_1 - p_2)$  が分離される ( $S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}$  と定義されていた) ので、振幅が求められる。

$$T_{fi}^{(i)} = -i(ig)^2 \frac{i}{(p_1 + p_2)^2 - m_3^2 + i\epsilon} \quad (95)$$

$$T_{fi}^{(ii)} = -i(ig)^2 \frac{i}{(p_4 - p_1)^2 - m_3^2 + i\epsilon} \quad (96)$$

この振幅の式と Fig.4 を見比べると、各部品が一對一に対応していることがわかる。

$$\begin{aligned} \text{外線} &\rightarrow 1 \\ \text{頂点} &\rightarrow ig \\ \text{内線} &\rightarrow i/(k^2 - m_3^2 + i\epsilon) \end{aligned}$$

ここで、振幅 (v) を議論する。これは  $\delta_{p_1, p_3} \delta_{p_2, p_4}$  つまり  $\delta_{fi}$  とバブル状の部分、すなわち、真空から真空への遷移プロセスの積となっている。実は、今の定式化では、相互作用の存在によって、 $\langle 0|0 \rangle = 1$  ではなくなっている。このため、正しくは

$$\langle f | T \exp \left[ i \int L_I(x) d^4x \right] | i \rangle \Rightarrow \frac{\langle f | T \exp \left[ i \int L_I(x) d^4x \right] | i \rangle}{\langle 0 | T \exp \left[ i \int L_I(x) d^4x \right] | 0 \rangle} \quad (97)$$

を評価しなくてはならない。この分母を考慮すると、振幅 (v) は落ちる。この  $\langle 0|0 \rangle$  で割ることを取り入れるため、真空から真空への遷移を部分ダイアグラムとして含むダイアグラムは生成しない、と決めておけば、このことは自動的に取り込まれる。

次に、崩壊過程  $\phi \rightarrow \chi + \eta$  を考える ( $m_1 > m_2 + m_3$  であるとする)。この過程は 1 次 ( $n = 1$ ) でおきるが、3 次 ( $n = 3$ ) で生じるダイアグラムの例を Fig.5 に示す。

このとき、振幅の式に現れる、座標積分は3つ、プロパゲーターより現れる運動量積分は3つである。出てくるデルタ関数のうち、1つは全体の運動量保存則として、振幅の外側に取り出されるので、運動量積分が1つ余ることになる。実際、各頂点での運動量保存則が成り立っていても、この Fig.5 のようにループを成している部分があれば、そこでの運動量は一意に定まらない。このとき、振幅は運動量積分を含むことになる。Fig.5 の左のダイアグラムが表す振幅には次のような積分が含まれる。

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p_1+k)^2 - m_2^2 + i\epsilon} \frac{i}{k^2 - m_3^2 + i\epsilon} \quad (98)$$

このような振幅をループ振幅と呼び、積分が含まれるだけ計算は複雑である。これに対して、Fig.4 の (i), (ii) のようにループを含まないものをツリー振幅と呼ぶ。

Eq.(98) をみると、実はこの積分は発散している。 $|k|$  の大きいところで、分母は  $k^4$  の振る舞いをするので積分は収束しない。このようにして、ループ振幅が現れる高次の振幅は一般に発散する場合があります、それをきちんと処理して測定量に無限大が現れないようにする処方が繰り込みである。

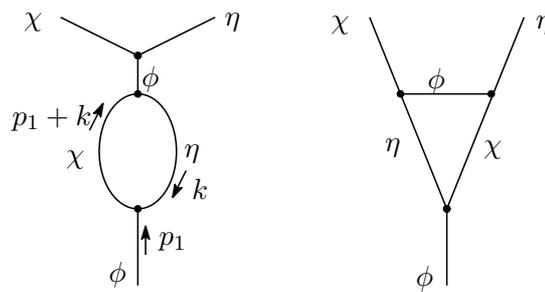


図 5: 崩壊過程  $\phi \rightarrow \chi + \eta$  の3次摂動で現れるループ振幅の例

## 6 ダイアグラム手法

いままでの説明で、振幅をファインマンダイアグラムを用いて計算する方法の概略が示された。この節で要約しておく。

1. 標準模型あるいは利用する理論的な模型のラグランジアンが与えられており、それから一連のファインマン則が与えられているものとする（この文書では、電弱相互作用について、付録として与えてある）。
2. 計算しようとする、プロセスを定める。具体的には外線の運動量や量子数、計算の次数を決める。
3. 必要なファインマンダイアグラムをすべて生成する。なお、非連結なダイアグラムは生成しない。
4. 個々のダイアグラムに対応する振幅を書き下す。1つの振幅は以下の要素の積である。（注：QCDで必要となるカラー因子について、このページでは説明していない。）
  - 外線に対する粒子の波動関数。スカラー - なら 1, フェルミ粒子なら,  $u(p)$  あるいは  $\bar{u}(p)$ , ベクトル粒子なら  $\epsilon_\lambda^\mu(p)$ 。
  - 内線にはファイマン則に与えられたプロパゲーター。
  - 頂点には, ファイマン則に与えられた頂点の因子。（運動量に依存する頂点の場合, 運動量の向きの規約に従わねばならない。）
  - ループのある場合,  $\int d^4k/(2\pi)^4$  の積分。
  - 符号因子, 統計因子。一般的には難しいが, ツリーの場合でも, 「終状態に同じフェルミオンが2つ以上ある場合, ある振幅を基準として, その振幅でフェルミオンを入れ替えた振幅に対しては  $(-1)$  を乗じる」は必要である。ループになると, 「フェルミオンのループがある場合, ループ1つごとに振幅に  $(-1)$  を乗じる」などや統計因子がでてくる。

生成された式では各頂点で運動量保存則が成り立っている。

振幅を表す式の個々の要素は, パラメタ（質量や結合定数）と外線の運動量の関数であるから, それらの数値が与えられれば, 関数の値を計算し, それらに乗じることにより, 振幅の「数値」を計算できる。

5. 振幅の和をとって自乗したものが行列要素となる。2節の式に従い, 崩壊幅や断面積を計算する。このため, 一般には終状態の位相空間での積分が必要となる。また, 状態に含まれる粒子のスピンや自由度により平均操作が必要となる。始状態について平均する場合は,  $|T|^2$  に対して, 以下を始状態の粒子ごとに乗じる。

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{スカラー} \\ \text{フェルミオン} \\ \text{ニュートリノ} \\ \text{質量のないベクトル} \\ \text{質量のあるベクトル} \end{array} \quad (99)$$

## 7 付録 A : 電弱理論

fermion( $f$ )		$I^3$	$Y$	$Q$	
left-handed fermion ( $f_L$ )					
quark ( $q_L$ )	$\cdots \begin{pmatrix} U_L \\ D_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
lepton ( $l_L$ )	$\cdots \begin{pmatrix} U_L \\ D_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
right-handed fermion ( $f_R$ )					
quark ( $q_R$ )	$\cdots U_R$	$u_R, c_R, t_R$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\cdots D_R$	$d_R, s_R, b_R$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
lepton ( $l_R$ )	$\cdots U_R$	$e_R, \mu_R, \tau_R$	0	-1	-1
scalar( $\phi$ )					
		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\chi_1 + \chi_2 \\ v + H - i\chi_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

添え字  $L$  と  $R$  は 左手- 右手- 成分を表す。

$$\psi_L = L\psi = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \quad \psi_R = R\psi = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi. \quad (100)$$

### 7.1 ファインマン・ルール

ファインマンゲージにする場合は  $\xi_W = \xi_Z = 1$  とする。以下では非線形ゲージでの規則を示す。標準的なゲージに戻すときには  $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = \tilde{\delta} = \tilde{\varepsilon} = \tilde{\kappa} = 0$  とすれば良い。

基本的なファインマン・ルールは、いわゆる京都方式で表している。粒子の外線は頂点方向に 入る ものとして定義されている。例えば  $W^+$  と記されている粒子は、入ってくる  $W^+$  あるいは 出て行く  $W^-$  を表す。粒子の運動量は頂点に対して 入る方向 と定義されるが、ただし、ゴースト粒子だけはゴースト数の方向の運動量であると定める。

京都方式と、しばしば教科書で用いられる「標準」方式との比較は以下である。

	Kyoto	Kyoto $\rightarrow$ textbook	textbook
Amplitude	$T$	$\times i$	$iT$
Propagator	$i \langle \phi\phi \rangle$	$\times -i$	$\langle \phi\phi \rangle$
Vertex	$L_{int}$	$\times i$	$iL_{int}$
Loop	$\int \frac{d^4l}{i(2\pi)^4}$	$\times i$	$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}$
External line		(same)	

我々が  $L_{int}$  からルールを作るときのやり方について、2つコメントしておく。

$$\text{微分を含む場} \quad \partial_\mu \phi \Rightarrow -ip_\mu \quad (101)$$

$$\text{同一の場合} \quad \phi^n \Rightarrow n! \quad (102)$$

## 7.2 EW 補足

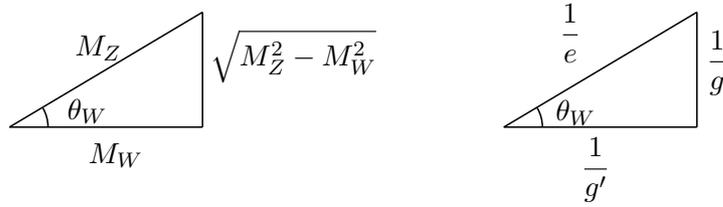


図 6: Weinberg Angle

結合定数は, ワインバーグ角  $\theta_W$  を使って書く場合もある。以下の略記法を使う。

$$c_W = \cos \theta_W, \quad s_W = \sin \theta_W \quad (103)$$

結合定数は,  $e, c_W, s_W, M_Z, M_H, m_f$  で書いたほうがコンパクトになる。例えばでのフェルミオンとベクトルの相互作用。

$$(W) \quad \frac{e}{\sqrt{2}s_W} \gamma_\alpha L \quad (104)$$

$$(Z) \quad \frac{e}{2c_W s_W} \gamma_\alpha (\pm L - 2Qs_W^2) \quad (105)$$

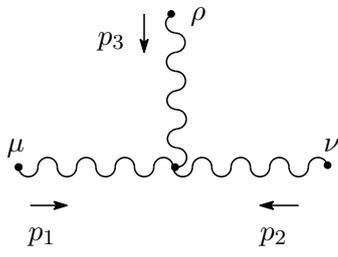
Particle Data Group

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} &= 137.035999679(94) \\ G_F &= 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} = \pi\alpha/\sqrt{2}s_W^2 M_W^2 \\ \sin^2 \theta_W(M_Z, \overline{\text{MS}}) &= 0.23119(14) \\ M_W &= 80.398(25) \text{GeV} \\ M_Z &= 91.1876(21) \text{GeV} \\ m_t &= 171.2 \pm 2.1 \text{GeV} \\ \alpha_s(M_Z^2) &= 0.1176(20) \end{aligned}$$

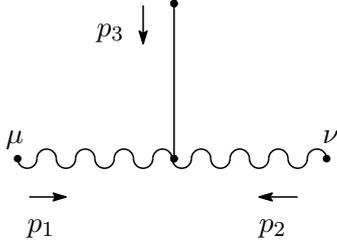
### 7.3 Propagators

$W^\pm$	$\frac{1}{k^2 - M_W^2} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi_W) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi_W M_W^2} \right)$
$Z$	$\frac{1}{k^2 - M_Z^2} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi_Z) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi_Z M_Z^2} \right)$
$A$	$\frac{1}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$
$f$	$\frac{-1}{\gamma_\mu k^\mu - m_f}$
$H$	$\frac{-1}{k^2 - M_H^2}$
$\chi^\pm$	$\frac{-1}{k^2 - \xi_W M_W^2}$
$\chi_3$	$\frac{-1}{k^2 - \xi_Z M_Z^2}$
$c^\pm$	$\frac{-1}{k^2 - \xi_W M_W^2}$
$c^Z$	$\frac{-1}{k^2 - \xi_Z M_Z^2}$
$c^A$	$\frac{-1}{k^2}$

### 7.4 Vector-Vector-Vector

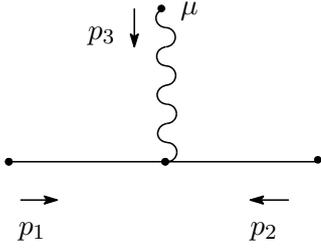
	$p_1 (\mu)$	$p_2 (\nu)$	$p_3 (\rho)$	
	$W^-$	$W^+$	$A$	$e \left[ g^{\mu\nu} (p_1 - p_2)^\rho \right. \\ + (1 + \tilde{\alpha}/\xi_W) (p_3^\nu g^{\mu\rho} - p_3^\mu g^{\nu\rho}) \\ \left. + (1 - \tilde{\alpha}/\xi_W) (p_2^\mu g^{\nu\rho} - p_1^\nu g^{\mu\rho}) \right]$
	$W^-$	$W^+$	$Z$	$e \frac{c_W}{s_W} \left[ g^{\mu\nu} (p_1 - p_2)^\rho \right. \\ + (1 + \tilde{\beta}/\xi_W) (p_3^\nu g^{\mu\rho} - p_3^\mu g^{\nu\rho}) \\ \left. + (1 - \tilde{\beta}/\xi_W) (p_2^\mu g^{\nu\rho} - p_1^\nu g^{\mu\rho}) \right]$

## 7.5 Vector-Vector-Scalar



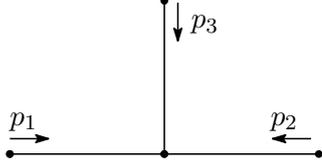
$p_1$ ( $\mu$ )	$p_2$ ( $\nu$ )	$p_3$	
$W^\pm$	$A$	$\chi^\mp$	$\mp ie M_W (1 - \tilde{\alpha}) g^{\mu\nu}$
$W^\pm$	$Z$	$\chi^\mp$	$\pm ie \frac{1}{s_W c_W} M_W (1 - c_W^2 (1 - \tilde{\beta})) g^{\mu\nu}$
$W^-$	$W^+$	$H$	$e \frac{1}{s_W} M_W g^{\mu\nu}$
$Z$	$Z$	$H$	$e \frac{1}{s_W c_W^2} M_W g^{\mu\nu}$

## 7.6 Scalar-Scalar-Vector



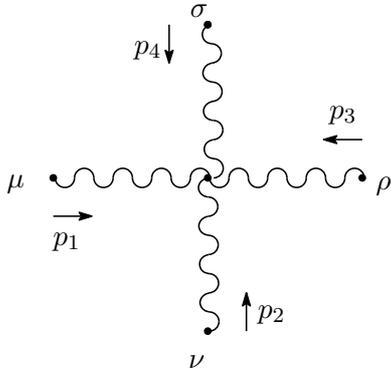
$p_1$	$p_2$	$p_3$ ( $\mu$ )	
$H$	$\chi^\mp$	$W^\pm$	$ie \frac{1}{2s_W} [(1 - \tilde{\delta}) p_2^\mu - (1 + \tilde{\delta}) p_1^\mu]$
$\chi_3$	$\chi^\mp$	$W^\pm$	$\pm e \frac{1}{2s_W} [(1 - \tilde{\kappa}) p_2^\mu - (1 + \tilde{\kappa}) p_1^\mu]$
$\chi^-$	$\chi^+$	$A$	$e (p_2 - p_1)^\mu$
$\chi^-$	$\chi^+$	$Z$	$e \frac{c_W^2 - s_W^2}{2s_W c_W} (p_2 - p_1)^\mu$
$H$	$\chi_3$	$Z$	$ie \frac{1}{2s_W c_W} [(1 - \tilde{\varepsilon}) p_2^\mu - (1 + \tilde{\varepsilon}) p_1^\mu]$

## 7.7 Scalar-Scalar-Scalar



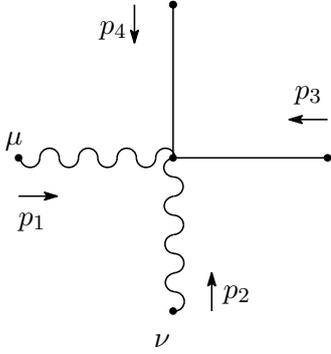
$p_1$	$p_2$	$p_3$	
$H$	$H$	$H$	$-e \frac{3}{2s_W M_W} M_H^2$
$H$	$\chi^-$	$\chi^+$	$-e \frac{1}{2s_W M_W} (M_H^2 + 2\tilde{\delta} M_W^2 \cdot \xi_W)$
$H$	$\chi_3$	$\chi_3$	$-e \frac{1}{2s_W M_W} (M_H^2 + 2\tilde{\varepsilon} M_Z^2 \cdot \xi_Z)$

## 7.8 Vector-Vector-Vector-Vector



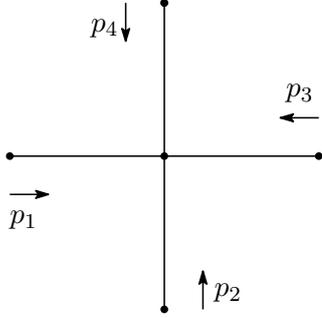
$p_1 (\mu)$	$p_2 (\nu)$	$p_3 (\rho)$	$p_4 (\sigma)$	
$W^+$	$W^-$	$A$	$A$	$e^2 [-2g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + (1 - \tilde{\alpha}^2/\xi_W)(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})]$
$W^+$	$W^-$	$A$	$Z$	$e^2 \frac{c_W}{s_W} [-2g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + (1 - \tilde{\alpha}\tilde{\beta}/\xi_W)(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})]$
$W^+$	$W^-$	$Z$	$Z$	$e^2 \frac{c_W^2}{s_W^2} [-2g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + (1 - \tilde{\beta}^2/\xi_W)(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})]$
$W^+$	$W^-$	$W^-$	$W^+$	$-e^2 \frac{1}{s_W} [-2g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma})]$

## 7.9 Vector-Vector-Scalar-Scalar



$p_1$ ( $\mu$ )	$p_2$ ( $\nu$ )	$p_3$	$p_4$	
$A$	$W^\pm$	$H$	$\chi^\mp$	$\mp ie^2 \frac{1}{2s_W} (1 - \tilde{\alpha}\tilde{\delta}) g^{\mu\nu}$
$A$	$W^\pm$	$\chi_3$	$\chi^\mp$	$-e^2 \frac{1}{2s_W} (1 - \tilde{\alpha}\tilde{\kappa}) g^{\mu\nu}$
$Z$	$W^\pm$	$H$	$\chi^\mp$	$\pm ie^2 \frac{1}{2s_W^2 c_W} (1 - c_W^2 (1 - \tilde{\beta}\tilde{\delta})) g^{\mu\nu}$
$Z$	$W^\pm$	$\chi_3$	$\chi^\mp$	$e^2 \frac{1}{2s_W^2 c_W} (1 - c_W^2 (1 - \tilde{\beta}\tilde{\kappa})) g^{\mu\nu}$
$A$	$A$	$\chi^+$	$\chi^-$	$2e^2 g^{\mu\nu}$
$Z$	$A$	$\chi^+$	$\chi^-$	$2e^2 \frac{c_W^2 - s_W^2}{2s_W c_W} g^{\mu\nu}$
$Z$	$Z$	$\chi^+$	$\chi^-$	$2e^2 \left( \frac{c_W^2 - s_W^2}{2s_W c_W} \right)^2 g^{\mu\nu}$
$W^+$	$W^-$	$H$	$H$	$e^2 \frac{1}{2s_W^2} g^{\mu\nu}$
$W^+$	$W^-$	$\chi_3$	$\chi_3$	$e^2 \frac{1}{2s_W^2} g^{\mu\nu}$
$W^+$	$W^-$	$\chi^-$	$\chi^+$	$e^2 \frac{1}{2s_W^2} g^{\mu\nu}$
$Z$	$Z$	$H$	$H$	$e^2 \frac{1}{2s_W^2 c_W^2} g^{\mu\nu}$
$Z$	$Z$	$\chi_3$	$\chi_3$	$e^2 \frac{1}{2s_W^2 c_W^2} g^{\mu\nu}$

### 7.10 Scalar-Scalar-Scalar-Scalar

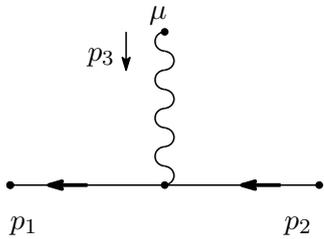


$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	
$H$	$H$	$H$	$H$	$-e^2 \frac{3M_H^2}{4s_W^2 M_W^2}$
$\chi_3$	$\chi_3$	$\chi_3$	$\chi_3$	$-e^2 \frac{3M_H^2}{4s_W^2 M_W^2}$
$\chi^\pm$	$\chi^\mp$	$\chi^\mp$	$\chi^\pm$	$-e^2 \frac{M_H^2}{2s_W^2 M_W^2}$
$H$	$H$	$\chi_3$	$\chi_3$	$-e^2 \frac{M_H^2 + 2\tilde{\varepsilon}^2 M_Z^2 \cdot \xi_Z}{4s_W^2 M_W^2}$
$H$	$H$	$\chi^+$	$\chi^-$	$-e^2 \frac{M_H^2 + 2\tilde{\delta}^2 M_W^2 \cdot \xi_W}{4s_W^2 M_W^2}$
$\chi^+$	$\chi^-$	$\chi_3$	$\chi_3$	$-e^2 \frac{M_H^2 + 2\tilde{\kappa}^2 M_W^2 \cdot \xi_W}{4s_W^2 M_W^2}$

### 7.11 Fermion-Fermion-Vector

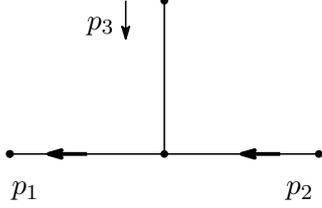
フェルミオンの混合角はここでは省略した。なお，明記していないが，クォークは色の自由度を持っている。

$f$		$I_3$	$Q_f$		$I_3$	$Q_f$
$U$	$u, c, t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	$\frac{1}{2}$	0
$D$	$d, s, b$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$e, \mu, \tau$	$-\frac{1}{2}$	-1



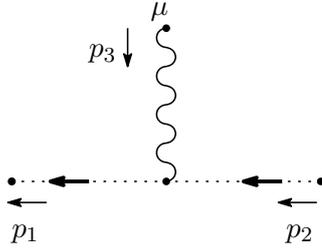
$p_1$	$p_2$	$p_3 (\mu)$	
$\bar{f}$	$f$	$A$	$eQ_f \gamma^\mu$
$\bar{f}$	$f$	$Z$	$e \frac{1}{2s_W c_W} \gamma^\mu (I_3(1 - \gamma_5) - 2s_W^2 Q_f)$
$\bar{U}/\bar{D}$	$D/U$	$W^+/W^-$	$e \frac{1}{2\sqrt{2}s_W} \gamma^\mu (1 - \gamma_5)$

### 7.12 Fermion-Fermion-Scalar



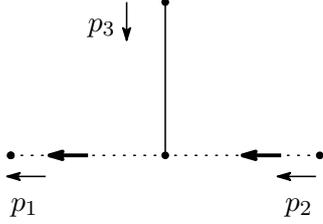
$p_1$	$p_2$	$p_3$	
$\bar{f}$	$f$	$H$	$-e \frac{1}{2s_W} \frac{m_f}{M_W}$
$\bar{U}/\bar{D}$	$U/D$	$\chi_3$	$(-/+ )ie \frac{1}{2s_W} \frac{m_f}{M_W} \gamma_5$
$\bar{U}$	$D$	$\chi^+$	$-ie \frac{1}{2\sqrt{2}s_W} \frac{1}{M_W} [(m_D - m_U) + (m_D + m_U)\gamma_5]$
$\bar{D}$	$U$	$\chi^-$	$-ie \frac{1}{2\sqrt{2}s_W} \frac{1}{M_W} [(m_U - m_D) + (m_U + m_D)\gamma_5]$

### 7.13 Ghost-Ghost-Vector



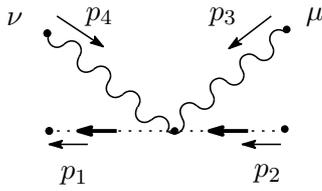
$p_1$	$p_2$	$p_3 (\mu)$	
$\bar{c}^A$	$c^{\mp}$	$W^{\pm}$	$\pm e p_1^{\mu}$
$\bar{c}^Z$	$c^{\mp}$	$W^{\pm}$	$\pm e \frac{c_W}{s_W} p_1^{\mu}$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^A$	$W^{\pm}$	$\mp e (p_1^{\mu} - \tilde{\alpha} p_2^{\mu})$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^Z$	$W^{\pm}$	$\mp e \frac{c_W}{s_W} (p_1^{\mu} - \tilde{\beta} p_2^{\mu})$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^{\pm}$	$A$	$\pm e (p_1^{\mu} + \tilde{\alpha} p_2^{\mu})$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^{\pm}$	$Z$	$\pm e \frac{c_W}{s_W} (p_1^{\mu} + \tilde{\beta} p_2^{\mu})$

### 7.14 Ghost-Ghost-Scalar



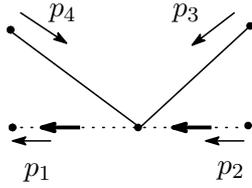
$p_1$	$p_2$	$p_3$	
$\bar{c}^Z$	$c^Z$	$H$	$-e \frac{1}{2s_W c_W^2} (1 + \tilde{\varepsilon}) M_W \cdot \xi_Z$
$\bar{c}^Z$	$c^{\mp}$	$\chi^{\pm}$	$\pm i e \frac{1}{2s_W c_W} M_W \cdot \xi_Z$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^A$	$\chi^{\pm}$	$\mp i e M_W \cdot \xi_W$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^Z$	$\chi^{\pm}$	$\mp i e \frac{1}{2s_W c_W} (c_W^2 - s_W^2 + \tilde{\kappa}) M_W \cdot \xi_W$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^{\pm}$	$H$	$-e \frac{1}{2s_W} (1 + \tilde{\delta}) M_W \cdot \xi_W$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^{\pm}$	$\chi_3$	$\pm i e \frac{1}{2s_W} (1 - \tilde{\kappa}) M_W \cdot \xi_W$

### 7.15 Ghost-Ghost-Vector-Vector



$p_1$	$p_2$	$p_3 (\mu)$	$p_4 (\nu)$	
$\bar{c}^{\mp}$	$c^A$	$A$	$W^{\pm}$	$-e^2 \tilde{\alpha} g^{\mu\nu}$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^A$	$Z$	$W^{\pm}$	$-e^2 \frac{c_W}{s_W} \tilde{\beta} g^{\mu\nu}$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^Z$	$A$	$W^{\pm}$	$-e^2 \frac{c_W}{s_W} \tilde{\alpha} g^{\mu\nu}$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^Z$	$Z$	$W^{\pm}$	$-e^2 \frac{c_W^2}{s_W^2} \tilde{\beta} g^{\mu\nu}$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^{\pm}$	$W^{\mp}$	$W^{\pm}$	$-e^2 \left( \tilde{\alpha} + \frac{c_W^2}{s_W^2} \tilde{\beta} \right) g^{\mu\nu}$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^{\mp}$	$W^{\pm}$	$W^{\pm}$	$2e^2 \left( \tilde{\alpha} + \frac{c_W^2}{s_W^2} \tilde{\beta} \right) g^{\mu\nu}$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^{\pm}$	$A$	$A$	$2e^2 \tilde{\alpha} g^{\mu\nu}$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^{\pm}$	$Z$	$A$	$e^2 \frac{c_W}{s_W} (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) g^{\mu\nu}$
$\bar{c}^{\mp}$	$c^{\pm}$	$Z$	$Z$	$2e^2 \frac{c_W^2}{s_W^2} \tilde{\beta} g^{\mu\nu}$

## 7.16 Ghost-Ghost-Scalar-Scalar



$p_1$	$p_2$	$p_3 (\mu)$	$p_4 (\nu)$	
$\bar{c}^Z$	$c^Z$	$H$	$H$	$-e^2 \frac{1}{2s_W^2 c_W^2} \tilde{\varepsilon} \cdot \xi_Z$
$\bar{c}^Z$	$c^Z$	$\chi_3$	$\chi_3$	$e^2 \frac{1}{2s_W^2 c_W^2} \tilde{\varepsilon} \cdot \xi_Z$
$\bar{c}^Z$	$c^\pm$	$\chi^\mp$	$H$	$\mp i e^2 \frac{1}{4s_W^2 c_W} \tilde{\varepsilon} \cdot \xi_Z$
$\bar{c}^Z$	$c^\pm$	$\chi^\mp$	$\chi_3$	$e^2 \frac{1}{4s_W^2 c_W} \tilde{\varepsilon} \cdot \xi_Z$
$\bar{c}^\mp$	$c^A$	$\chi^\pm$	$H$	$\mp i e^2 \frac{1}{2s_W} \tilde{\delta} \cdot \xi_W$
$\bar{c}^\mp$	$c^A$	$\chi^\pm$	$\chi_3$	$e^2 \frac{1}{2s_W} \tilde{\kappa} \cdot \xi_W$
$\bar{c}^\mp$	$c^Z$	$\chi^\pm$	$H$	$\mp i e^2 \frac{1}{4s_W^2 c_W} (\tilde{\kappa} + \tilde{\delta}(c_W^2 - s_W^2)) \cdot \xi_W$
$\bar{c}^\mp$	$c^Z$	$\chi^\pm$	$\chi_3$	$e^2 \frac{1}{4s_W^2 c_W} (\tilde{\delta} + \tilde{\kappa}(c_W^2 - s_W^2)) \cdot \xi_W$
$\bar{c}^\mp$	$c^\pm$	$H$	$H$	$-e^2 \frac{1}{2s_W^2} \tilde{\delta} \cdot \xi_W$
$\bar{c}^\mp$	$c^\pm$	$\chi_3$	$\chi_3$	$-e^2 \frac{1}{2s_W^2} \tilde{\kappa} \cdot \xi_W$
$\bar{c}^\mp$	$c^\pm$	$\chi_3$	$H$	$\mp i e^2 \frac{1}{4s_W^2} (\tilde{\kappa} - \tilde{\delta}) \cdot \xi_W$
$\bar{c}^\mp$	$c^\pm$	$\chi^-$	$\chi^+$	$e^2 \frac{1}{4s_W^2} (\tilde{\delta} + \tilde{\kappa}) \cdot \xi_W$
$\bar{c}^\mp$	$c^\mp$	$\chi^\pm$	$\chi^\pm$	$-e^2 \frac{1}{2s_W^2} (\tilde{\kappa} - \tilde{\delta}) \cdot \xi_W$

## 8 付録 B : 資料

### 8.1 相対論的記法

#### 1. 添え字

一般にギリシャ文字は 4 次元の添え字とする。  $\mu = 0, 1, 2, 3$  など。 0 が時間的, 1, 2, 3 が空間的な成分である。

#### 2. 反変 (contravariant) ベクトル

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad (106)$$

#### 3. 共変 (covariant) ベクトル

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) \quad (107)$$

#### 4. 添え字の縮約 (ないしは 4 次元内積) の規約と和記号の省略ルール

内積は「上と下」の添え字の間でとられる。

$$A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \quad (108)$$

反復したギリシャ文字の添え字 (4 次元添え字) については和記号 ( $\sum$ ) を省略する。

$$A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = \sum_{\mu} A^\mu B_\mu \Rightarrow A^\mu B_\mu \text{ と記す} \quad (109)$$

また, しばしばベクトルの自乗を以下のように書く。

$$\sum_{\mu} A^\mu A_\mu \Rightarrow A^\mu A_\mu \Rightarrow A^2 \quad (110)$$

#### 5. 計量 (metric) テンソル

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu} \quad (111)$$

これで添え字の上げ下げを行う。

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (112)$$

だから, 成分で書けば以下となる。

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3 \quad (113)$$

計量テンソルを使って内積を書くと以下となる。

$$A^\mu B_\mu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu \quad (114)$$

## 6. 完全反対称テンソル

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \mu\nu\rho\sigma \text{ が } 0123 \text{ の偶置換のとき} \\ -1 & \mu\nu\rho\sigma \text{ が } 0123 \text{ の奇置換のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (115)$$

## 7. 座標

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z) \quad (116)$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (117)$$

## 8. 運動量

$$p^\mu = (E, c\vec{p}) = (E, cp_x, cp_y, cp_z) \quad (118)$$

質量殻 (On-mass-shell) 条件

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - c^2 |\vec{p}|^2 = (mc^2)^2 \quad (119)$$

## 8.2 単位系

現在では SI 単位系が標準的である。SI 単位系では 7 つの基本単位がある。

これからの議論では、

$$c = 1, \quad \hbar = 1 \quad (120)$$

とおく。よって、 $\text{kg}, \text{m}^{-1}, \text{s}^{-1}$  を同じ単位で量ることになる。結果的にエネルギー ( $\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$ ) も同じ単位となる。

エネルギーの単位としては

$$1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\text{J} \quad (121)$$

が使うのが普通である。従って、長さの逆数、時間の逆数、質量、エネルギーはすべて eV 単位の量となる。

$$c\hbar = 0.197\text{GeV} \cdot \text{fm}, \quad (c\hbar)^2 = 0.389\text{GeV}^2 \cdot \text{mb} \quad (1\text{b} = 10^{-24}\text{cm}^2) \quad (122)$$

さらに電流の単位を変更する自由度がある。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad (123)$$

であるが、今  $c = 1$  であるので、Lorentz-Heviside 単位系と呼ばれる、 $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$  を使う。

電磁結合定数は

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137. \dots} \quad (124)$$

である。

いまは,  $c = \hbar = 1$  としているので, 崩壊幅  $\Gamma$  は [M] の次元, 断面積  $\sigma$  は  $[M^{-2}]$  の次元である。断面積では b (barn, バーン) という単位がしばしば使われる。1b =  $10^{-24}\text{cm}^2$  である。

$$\text{寿命} \quad \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.58 \times 10^{-25} \text{GeV} \cdot \text{s}}{\Gamma} \quad (125)$$

$$\text{断面積} \quad (c\hbar)^2 \sigma = (0.389 \text{GeV}^2 \cdot \text{mb}) \sigma \quad (126)$$

### 8.3 ガンマ行列

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (127)$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^j)^\dagger = -\gamma^j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (128)$$

$$\gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (129)$$

$$\gamma_5 \gamma_5 = 1, \quad \gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma^\mu = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (130)$$

$$L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad L + R = 1, \quad L^2 = L, \quad R^2 = R, \quad LR = RL = 0 \quad (131)$$

$$\text{Tr} 1 = 4 \quad (132)$$

(上の式で"γ"に  $\gamma_5$  は含まれない)

振幅の絶対値の二乗  $|T|^2$  を計算すると, 次のような形が生じる。

$$T_j(T_k)^* = \bar{u}(p_2) \gamma_a \gamma_b \cdots u(p_1) \times (\bar{u}(p_2) \gamma_x \gamma_y \cdots u(p_1))^* \quad (133)$$

複素共役をとるには, ガンマ行列の順序を逆転し,  $u$  は  $\bar{u}$ ,  $\bar{u}$  は  $u$  にすればよい。

$$(\bar{u}(p_2) \gamma_x \gamma_y \cdots u(p_1))^* = \bar{u}(p_1) \cdots \gamma_y \gamma_x u(p_2) \quad (134)$$

ただし,  $\gamma_5$  については  $(-1)$  を乗じる。

すると次のように書ける。 $u$  は 4 成分の列ベクトル,  $\bar{u}$  は 4 成分の行ベクトル, ガンマ行列は 4 行 4 列の行列であることに留意されたい。

$$T_j(T_k)^* = \text{Tr} [u(p_2) \bar{u}(p_2) \gamma_a \gamma_b \cdots u(p_1) \bar{u}(p_1) \cdots \gamma_y \gamma_x] \quad (135)$$

ここで  $u\bar{u}$  については以下の偏りの和をとる公式を使う。

$$\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = \begin{cases} \not{p} + m & \text{フェルミオン} \\ \not{p} - m & \text{反フェルミオン} \end{cases} \quad (136)$$

ただし, 標準模型でのディラックニュートリノは左巻きしかないので  $\not{p}L = \not{p}(1 - \gamma_5)/2$  である。

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma^\mu = 0. \quad (137)$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (138)$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \quad (139)$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu \quad (140)$$

$$Tr 1 = 4 \quad (141)$$

$$Tr \text{ 奇数個のガンマ行列} = 0 \quad (142)$$

$$Tr \gamma^\mu\gamma^\nu = 4g^{\mu\nu} \quad (143)$$

$$Tr \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \quad (144)$$

$$Tr \gamma_5 \text{ 3個以下のガンマ行列} = 0 \quad (145)$$

$$Tr \gamma_5 \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (146)$$

$$L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad \Rightarrow \quad L^2 = L, R^2 = R, LR = RL = 0 \quad (147)$$